UNIVERSITÉ DE BRETAGNE-SUD
MASTER 2ème année
MTH 2322 (OPTIMISATION)

Convexité

Exercice 1. Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

1. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, exprimer $f(x+h)$ en fonction de $f(x)$, $f'(x)$ et h.
2. En donnant un argument lié à la notion de Hessienne dire pourquoi f est convexe.
3. Écrire la définition de : f est convexe.
4. En remarquant que $\theta y + (1-\theta)x = x + \theta(y-x)$, montrer que f est convexe.

Exercice 2. Soient A une matrice carrée $n \times n$ symétrique vérifiant (pour un nombre $\alpha > 0$) $(Ax \cdot x) \geq \alpha \|x\|^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et soit l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}(Ax \cdot x) - (b \cdot x)$.

1. En donnant un argument lié à la notion de Hessienne dire pourquoi f est convexe.
2. Écrire la définition de : f est convexe.
3. Montrer que f est convexe.

Exercice 3. Un problème d'estimation de paramètre par le maximum de vraisemblance.
Soient $Y_1, \ldots, Y_n$, n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0, 1\}$, chacune suivant une loi paramètrée par $\theta \in \mathbb{R}^p$ $f_i(., \theta)$. On appelle fonction de vraisemblance la fonction suivante $\mathcal{L}(y_1, \ldots, y_n, \theta) = P(Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n)$.

1. Montrer que $\mathcal{L}(y_1, \ldots, y_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f_i(y_i, \theta)$.

   On suppose que chacune des n variables $Y_i (\in \mathbb{R})$ dépend d'une variable $X_i (\in \mathbb{R}^p)$ par la formule
$$P(Y_i = 1 | X_i = x_i) = \frac{e^{\theta \cdot x_i}}{1 + e^{\theta \cdot x_i}}.$$
2. Donner un exemple d'une telle relation.
3. Montrer que la fonction de vraisemblance s'écrit
$$\mathcal{L}(y_1, \ldots, y_n, \theta) = \prod_{i=1}^n (P(Y_i = 1 | X_i = x_i))^{y_i} (1 - P(Y_i = 1 | X_i = x_i))^{1-y_i}.$$
4. Montrer que $\ln(\mathcal{L}(y_1, \ldots, y_n, \theta))$ est strictement concave.
5. Donner une caractérisation du θ réalisant le maximum de $\mathcal{L}(y_1, \ldots, y_n, \theta)$.