Année universitaire 2013 - 2014
Licence 3 - Maths
MTH 1504 : **Analyse Numérique Matricielle**

Contrôle Terminal

durée 2h, calculatrices autorisées et documents interdits

Exercice 1 - L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est muni de son produit scalaire usuel.
1. Écrivez en pseudo-code l'algorithme permettant de calculer le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
2. Écrivez en pseudo-code l'algorithme permettant de calculer le produit entre une matrice carrée de taille n et un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 - L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est muni de la norme $\|.\|_1$ définie par : $\forall v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |v_i|$. Soit A une matrice carrée réelle de taille n. On note $\|A\|_1$ la valeur de sa norme pour la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|.\|_1$.
1. Donnez la définition de $\|A\|_1$.
2 Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\|_1 \leq \|x\|_1 (\displaystyle\max_{j \in \{1,\dots,n\}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|)$.

Déduisez-en que $\|A\|_1 \leq \displaystyle\max_{j \in \{1,\dots,n\}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

3. Soit j_0 un indice tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_{ij_0}| = \max_{j \in \{1,\dots,n\}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.
Justifiez l'existence de l'indice j_0.
Soit y le vecteur défini par $y_j = 0$ si $j \neq j_0$, $y_{j_0} = 1$. Montrez que $\dfrac{\|Ay\|_1}{\|y\|_1} = \displaystyle\max_{j \in \{1,\dots,n\}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

Déduisez-en un lien entre $\|A\|_1$ et $\max_{j \in \{1,\dots,n\}} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

Exercice 3 - L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est muni d'une norme $\|.\|$. On note également $\|.\|$ la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|.\|$ dans l'espace des matrices carrées de taille n. Soient A une matrice carrée de taille n telle que $\|A\| < 1$, $b \in \mathbb{R}^n$ et la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de u_0 et la formule de récurrence $u_{k+1} = A(u_k + b)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

1. Rappelez ce que signifie, pour une application d'un espace vectoriel normé dans lui-même, d'être strictement contractante
2. Démontrez que l'application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $u \mapsto A(u + b)$ est strictement contractante.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, établissez une majoration de $\|u_{k+1} - u_k\|$ en fonction de $\|A\|$, de k et de $\|u_1 - u_0\|$
4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $l \in \mathbb{N}$, établissez une majoration de $\|u_{k+l} - u_k\|$ en fonction de $\|A\|$, de k et de $\|u_1 - u_0\|$
5. En utilisant que, pour tout $r \in [0, 1[$, la série $\sum_{j=1}^{+\infty} r^j$ converge, démontrez que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.
6. Que pouvez-vous en déduire ?