Licence 1. Parcours Bio. Suites.

Exercice 1 : On rappelle que pout tout entier $n \geq 1$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$.

Démontrer par récurrence que, pour tout n de N, on a :

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + 4 \times 4! + ... + n \times n! = (n+1)! - 1.$$

Exercice 2 : Démontrer que, pour tout n de N, $4^n + 5$ est un multiple de 3.

Exercice 3 : On considère les suites u et v définies sur N par :

$u_0 = 0$ $\qquad$ $v_0 = 2$

$u_{n+1} = (3\ u_n + 1) / 4$ $\qquad$ $v_{n+1} = (3\ v_n + 1) / 4$

1) Calculer les trois premiers termes de chacune des deux suites.
2) Démontrer que les suites u et v sont adjacentes et calculer leurs limites.
3) On considère la suite s définie par $s_n = u_n + v_n$. Etudiez le comportement de la suite s.

Exercice 4 : 1) Soit g la fonction définie sur R* par : $g(x) = x/2 + 2/x$.

Etudier les variations de g, démontrer que sa courbe représentative C admet une asymptote oblique. Construire C.

2) On considère la suite u définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = 1/2\ u_n + 2/u_n$.

a) Vérifier que, pour tout n de N, on a : $u_n > 0$.
Comment doit-on choisir u_0 pour que la suite soit constante ?

b) Représenter les trois premiers termes de la suite sur le graphique de la première question, pour $u_0 = 5$, puis pour $u_0 = 1$. Quelles conjectures peut-on faire ?

c) Démontrer que, quel que soit u_0 de $R^{+*} - \{2\}$, la suite est minorée et décroissante à partir du rang 1. Que peut-on en conclure ?

Exercice 5 : 2 populations d'insectes comptent respectivement 100 000 et 180 000 individus. L'effectif de la première population augmente de 4% par semaine, alors que celui de la seconde diminue de 3% par semaine. On suppose que les croissances continuent à ce rythme.

1) Dans combien de semaines la première population aura-t-elle doublé ?

2) Dans combien de semaines l'effectif de la première population dépassera-t-il celui de la seconde ?

Exercice 6 : Dans une population d'effectif constant comprenant 1000 individus, 100 individus sont initialement porteurs d'un parasite. On estime que chaque semaine, 20% des individus infectés guérissent, alors que 20% des individus sains sont infectés par le parasite. On appelle u_n le nombre d'individus sains lors de la $n^{ième}$ semaine (avec $u_0 = 900$).

1) Trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1}.

2) Etudier la convergence de la suite u.