

Généralités sur les développements limités :

Formule générale pour les développements limités :

$$f(x) = f(0) + f'(0) \frac{x}{1!} + f''(0) \frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Le développement limité existe et est unique.

Les développements limités usuels en 0 à l'ordre 5 :

$$f(x) = f(0) + f'(0) \frac{x}{1!} + f''(0) \frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1) \frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \frac{x^3}{3!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3) \frac{x^4}{4!} \\ + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4) \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5)$$

Exercices :

- Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 5 de $\cos(x) + \sin(x)$.
- Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 5 de e^{1+2x} .
- Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $\ln(1+x) \times x^2$.
- Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\cos(x)\sqrt{1+x}$.
- Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\frac{\sin(x)}{x}$.
- En déduire la limite en 0 de $\frac{\sin(x)}{x}$.
- Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 5 de $\tan(x)$.

Autres développements limités :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

Tracé des fonctions usuelles et des développements limités :

```
par(mfrow=c(3,2))
```

```
curve(exp(x),from=-5,to=5,col="blue")
```

```
curve(1+x+x^2/factorial(2)+x^3/factorial(3)+x^4/factorial(4)+x^5/factorial(5),
from=-5,to=5,add=TRUE,col="red")
```

```
curve(log(1+x),from=-5,to=5,col="blue")
```

```
curve(x-x^2/2+x^3/3-x^4/4+x^5/5,from=-5,to=5,add=TRUE,col="red")
```

```
curve(sin(x),from=-5,to=5,col="blue")
```

```
curve(x-x^3/factorial(3)+x^5/factorial(5),from=-5,to=5,add=TRUE,col="red")
```

```
curve(cos(x),from=-5,to=5,col="blue")
```

```
curve(1-x^2/factorial(2)+x^4/factorial(4),from=-5,to=5,add=TRUE,col="red")
```

```
curve(sqrt(1+x),from=-5,to=5,col="blue")
```

```
curve(1+ x/2 -1/4*x^2/factorial(2)-3/8*x^3/factorial(3)-5/2*x^4/factorial(4)-
7/2*x^5/factorial(5),from=-5,to=5,add=TRUE,col="red")
```

```
curve(1/(1-x),from=-5,to=5,col="blue")
```

```
curve(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 ,from=-5,to=5,add=TRUE,col="red")
```

```
par(mfrow=c(3,2))

curve(tan(x),from=-5,to=5,col="blue")
curve( x+x^3/factorial(3)+2*x^5/15,from=-5,to=5,add=TRUE,col="red")

curve(cosh(x),from=-5,to=5,col="blue")
curve(1+x^2/factorial(2)+x^4/factorial(4),from=-5,to=5,add=TRUE,col="red")

curve(sinh(x),from=-5,to=5,col="blue")
curve( x+x^3/factorial(3)+x^5/factorial(5),from=-5,to=5,add=TRUE,col="red")

curve(tanh(x),from=-5,to=5,col="blue")
curve( x-x^3/factorial(3)+2*x^5/15,from=-5,to=5,add=TRUE,col="red")

curve(1/(1+x),from=-5,to=5,col="blue")
curve(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 ,from=-5,to=5,add=TRUE,col="red")
```

Dérivation formelle :

```
D(expression(sin(cos(x+y^2))), "x")
```

Recherche d'un minimum d'une fonction :

La commande suivante renvoie la valeur du minimum d'une fonction ainsi que l'abscisse du minimum, dans l'intervalle $[0, 2]$.

```
optimize(f=function(x){cos(x)},lower=0,upper=2)
```