Remerciements

En acceptant de me diriger dans mon travail de thèse, Étienne Ghys m'a fait un grand honneur. Tout d'abord, cela m'a permis de vivre dans un laboratoire très agréable et dynamique. En usant généreusement de son temps, il m'a appris bien des choses et m'a guidé dans mes recherches avec une grande patience. Il m'a aussi fait rencontrer des chercheurs d'autres laboratoires, ce qui a été pour moi très instructif. En résumé, je lui dois à la fois tout ce que j'ai appris et tout ce que j'ai écrit dans cette thèse. Je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie André Haefliger et Christophe Bavard pour avoir accepté la tâche de rapporteur et pour avoir pris le temps de discuter longuement avec moi durant nos rencontres. J'adresse aussi mes remerciements à Pierre de la Harpe et à Pierre Pansu qui ont bien voulu faire partie du jury, ainsi qu'à Alain Valette pour les précieuses informations qu'il m'a données.

Comme je le disais plus haut, dans ce laboratoire qui m'a accueilli, j'ai trouvé un véritable esprit d'équipe. Je remercie particulièrement Frédéric Paulin pour l'intérêt qu'il porte toujours à mes questions et pour les nombreuses choses qu'il m'a apprises. Je n'oublie pas de remercier Gilles Robert pour s'être intéressé à mon travail et pour son aide et son soutient dans la recherche des sept polyèdres symétriques. Merci aussi à Marc Perret pour m'avoir initié aux corps locaux et pour son bureau toujours grand ouvert. Quel plaisir aussi de croiser Bruno Sévennec ; il est toujours prêt à s'investir dans un de vos problèmes. Pour sa grande disponibilité, je le remercie. Je remercie également Jean-Philippe Furter pour son aide dans mes calculs. Merci aussi à Abdelghani Zeghib pour les nombreuses discussions que nous avons eues dans les couloirs. Enfin je remercie tous les membres du laboratoire pour leur acceuil chaleureux.

Pour finir, je salue amoureusement Katia et notre fille Marion, à qui je dédie ce travail.

Table des matières

1 Polyèdres de dimension 2 à courbure ≤ 0 et de rang 2 **11**
1.1 Introduction 11
1.2 Sur les immeubles de dimension un 12
1.3 Sur les immeubles métriques de dimension un 14
1.4 Polyèdres à courbure ≤ 0 de rang 2 18

2 Les sept polyèdres symétriques **29**
2.1 Introduction 29
2.2 Immeubles sphériques hexagonaux et plans projectifs 30
2.3 Comment rechercher les exemples les plus simples 31
2.4 Classification 32
2.4.1 Au moins une identification à distance un 32
2.4.2 Uniquement des identifications à distance 3 40
2.4.3 Une identification à distance deux impose une identification à distance un 45
2.5 Dessins des sept polyèdres symétriques et leur groupe d'isométries 48
2.6 Calculs sur ces sept polyèdres symétriques 51
2.6.1 Les groupes fondamentaux et leurs abélianisés 52
2.6.2 Les links d'ordre 2 52
2.6.3 Les $H_2(P, \mathbb{Z})$ et les plats périodiques dans $\widetilde{P}$ 52
2.7 Tableau récapitulatif 53
2.8 Plats périodiques 53
2.9 Groupes automatiques 56

3 Sur les immeubles triangulaires **59**
3.1 La tour des links dans un immeuble triangulaire 59
3.1.1 Introduction 59
3.1.2 Le link d'ordre 2 59
3.1.3 La tour des links 63
3.1.4 Fonction de comptage 66
3.1.5 Conclusion 67
3.2 La propriété de Desargues du bord à l'infini vue à distance finie 67
3.2.1 Introduction 67
3.2.2 Points et droites de S_n. 67
3.2.3 Propriété de Desargues au niveau n 68
3.2.4 Des sphères non classiques 69
3.3 Autour du théorème de Świątkowski 71

3.3.1 Introduction 71
3.3.2 Un link d'ordre 2 bien particulier 71
3.3.3 L'alternative 72
3.4 Quelques questions 72

A Développements des sept polyèdres **75**

B Présentations des groupes fondamentaux et calcul de leur abélianisé **83**

C Calcul des links d'ordre 2 **87**

Introduction

Il y a une dizaine d'années, un très beau théorème de rigidité a été démontré. Rappelons certaines définitions avant de l'énoncer. Considérons une variété riemannienne fermée M à courbure négative ou nulle. À tout vecteur v du fibré unitaire tangent, on associe un entier qui est égal à la dimension de l'espace des champs de Jacobi parallèles le long de la géodésique définie par v. On définit alors le rang de M comme étant le minimum des rangs de ses vecteurs tangents. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème qui est notre référence constante (voir [BurS]):

THÉORÈME 0.1 *(Ballmann, Brin, Burns, Eberlein, Spatzier) Toute variété riemannienne fermée, à courbure négative ou nulle, de rang au moins égal à deux et irréductible, est localement symétrique.*

Rappelons qu'un espace est dit localement symétrique si en tout point x, la symétrie centrale de centre 0 dans la carte exponentielle en x, correspond dans la variété à une isométrie locale. Un espace sera qualifié de symétrique si cette isométrie est globale. Le revêtement universel d'un espace localement symétrique complet est globalement symétrique et la théorie des espaces symétriques nous dit qu'un espace symétrique irréductible (i.e. qui n'est pas un produit riemannien) est le quotient d'un groupe de Lie semi-simple par un sous-groupe compact maximal. De plus, dans le cas qui nous intéresse, à savoir celui de la courbure négative ou nulle, nous pouvons définir un bord à l'infini et on sait qu'il possède une structure particulière : celle d'un *immeuble de Tits*.

Décrivons de quoi il s'agit dans ce cas précis, pour un espace de rang deux, par exemple pour l'espace symétrique $SL_3(\mathbb{R})/SO_3(\mathbb{R})$, que l'on pense souvent comme l'espace des ellipsoïdes de $\mathbb{R}^3$ de volume un. Il s'agit d'un espace de dimension cinq dont le bord à l'infini est une sphère de dimension 4. Cette sphère est recouverte par une collection de cercles appelés appartements qui sont les traces des plats de la variété sur le bord à l'infini. Un plat dans cet espace est donné par l'ensemble des ellipsoïdes dont les directions principales sont fixées. Ces cercles à l'infini s'intersectent suivant des segments. Les plus petits d'entre eux qui correspondent à un angle de $\pi/3$ dans un plat, sont appelés chambres. Certaines propriétés qui serviront d'axiomes dans la définition générale d'un immeuble sont vérifiées par ces objets. Tout d'abord, on l'a vu, tous les cercles sont réunions de six chambres ; en général, les chambres d'un appartement forment un complexe associé à un groupe de Coxeter. Ensuite, par deux chambres quelconques, passe un appartement. Enfin, si deux appartements s'intersectent, il y a un isomorphisme de la réunion qui envoie l'un sur l'autre en fixant l'intersection. Dans notre exemple, l'intersection de deux chambres est soit connexe, soit la réunion de deux points diamétralement opposés.

Il y a au moins deux grandes classes d'immeubles. Les bords à l'infini que nous venons de décrire sont des immeubles *sphériques* car leurs appartements sont des sphères. Il existe

aussi des immeubles *euclidiens* dont les appartements sont des espaces euclidiens. Le plus simple des immeubles euclidiens est donné par un arbre homogène de valence 3. Ses appartements sont les droites plongées et les chambres sont les arêtes. Le lien fondamental qui existe entre ces deux notions est le fait que le bord à l'infini d'un immeuble euclidien est un immeuble sphérique dont les appartements sont les traces sur le bord à l'infini des appartements euclidiens.

On voit donc que s'il devait y avoir un analogue singulier des espaces symétriques de rang deux, il s'agirait des immeubles euclidiens de dimension deux (leurs bords ont des structures analogues). Il devient alors tentant d'essayer de caractériser les immeubles euclidiens de dimension deux dans une certaine catégorie d'espaces singuliers à courbure négative ou nulle et de rang deux, dans un sens qu'il nous faudra définir.

Avant de préciser quel a été l'objet de notre travail, nous mettons l'accent sur le fait que la dimension deux est ici particulièrement intéressante. En effet, les immeubles euclidiens de rang supérieur ou égal à trois ont été classifiés par J. Tits. Comme dans le cas des variétés, ils correspondent tous à des groupes de Lie (p-adiques cette fois), alors qu'il n'en n'est rien en dimension deux. En quelque sorte, la théorie des espaces singuliers de rang deux n'est pas achevée. Ces espaces ne sont pas toujours aussi symétriques qu'on aurait pu l'espérer.

Avant d'énoncer le théorème que nous avons obtenu et qui fait l'objet du premier chapitre, il nous faut préciser quelques définitions. On appellera polyèdre un complexe simplicial fini de dimension deux, connexe et sans bord, c'est-à-dire dont chaque arête est incidente à au moins deux faces. On dira que ce polyèdre est à courbure négative ou nulle et de rang deux si les trois conditions suivantes sont réalisées :

1. Chacun de ses triangles est réalisé géométriquement par un triangle euclidien de telle sorte que deux triangles adjacents aient des côtés de même longueur ; il s'agit là de la condition la plus naturelle de rang deux à l'intérieur des faces et le long des reliures.

2. Les plus petits cycles des links sont de longueur au moins égale à 2π ; c'est la condition locale pour être un espace à courbure négative ou nulle.

3. Tout germe de géodésique se trouve dans un germe de plat. Exprimé en termes de link, cela signifie que deux points d'un même link à distance supérieure ou égale à π se trouvent dans un cycle de longueur exactement égale à 2π. C'est là encore, la condition la plus naturelle de rang deux au niveau d'un point quelconque.

THÉORÈME 0.2 *Le revêtement universel d'un polyèdre fini de dimension deux, à courbure négative ou nulle et de rang deux, est soit le produit de deux arbres, soit un immeuble euclidien irréductible de dimension deux.*

La démonstration de ce théorème est parue dans les *Annales de l'Institut Fourier* (voir [Ba]). W. Ballmann et M. Brin ont obtenu indépendamment et simultanément, un résultat analogue. Cependant, la définition de la propriété de rang deux qu'ils adoptent met en jeu des phénomènes globaux (voir [BB]).

Il faut savoir qu'il n'existe que trois pavages du plan euclidien par réflexion ; et les trois pavés possibles sont le triangle équilatéral, le demi carré et l'équerre d'écolier (ou le demi triangle équilatéral). Dans notre polyèdre de rang deux, convenons d'effacer les arêtes fictives qui ne sont incidentes qu'à seulement deux faces. Alors, nous appellerons face maximale une composante connexe du complémentaire de l'ensemble des arêtes. Un corollaire de ce théorème est que les faces maximales d'un tel polyèdre sont ou bien toutes

des cylindres, ou bien toutes des rectangles, ou bien toutes des triangles deux à deux isométriques et de l'un des trois types décrits plus haut.

À partir du second chapitre, on se consacre essentiellement aux immeubles *triangulaires*, c'est-à-dire ceux dont les chambres sont des triangles euclidiens équilatéraux. Pour préciser les idées, commençons par décrire une construction due à J. Tits d'un immeuble triangulaire classique, associé à un corps local. Considérons le corps $K = \mathbb{Q}_2$ des nombres 2-adiques. On note $A = \mathbb{Z}_2$ son anneau de valuation et p une uniformisante (ici le nombre 2). L'ensemble des sommets de notre immeuble sera l'ensemble des classes de A-réseaux dans l'espace vectoriel K^3 ; deux réseaux se trouvant dans une même classe s'ils sont homothétiques via un élément de K. Une arête reliera deux sommets s'ils ne diffèrent que d'une unité au sens de la valuation. Plus précisément, Λ est incident à Λ' si $\Lambda \subset \Lambda'$ et si $p\Lambda' \subset \Lambda$. Cette relation est bien symétrique compte-tenu du choix de notre relation d'équivalence. Finalement, on attache un triangle équilatéral à tout cycle de longueur trois. Le groupe $PGL_3(K)$ opère transitivement sur l'ensemble des sommets de cet immeuble. Fixons-nous un sommet, celui correspondant au réseau canonique par exemple. Le stabilisateur de ce sommet est exactement le groupe $PGL_3(A)$. Le link en ce sommet est tout naturellement le graphe d'incidence du plan projectif $P^2(k)$ où k est le corps résiduel ($\mathbb{F}_2$ dans notre exemple). Aussi, chaque arête est incidente à $q+1$ faces ($q = p = 2$ dans notre exemple). De plus, il est à noter que dans le cas classique, tout automorphisme du link, en d'autres termes, toute isométrie locale de l'immeuble qui fixe un sommet, provient d'une isométrie globale. En effet, $PGL_3(A)$ opère sur le link comme sa réduction modulo p, qui est exactement $PGL_3(k)$.

Afin de distinguer les immeubles classiques des autres, et par analogie avec le cas des variétés, nous avons été amené à donner les deux définitions suivantes :

Définition 0.0.1 *Un immeuble euclidien sera dit localement symétrique si ses links ont des groupes d'automorphismes qui opèrent transitivement sur les drapeaux (point,droite).*

Les links des immeubles triangulaires sont des graphes d'incidence de plans projectifs. Dans les cas classiques, ces plans sont associés à des corps et le caractère localement symétrique est tout naturellement vérifié.

Définition 0.0.2 *Un immeuble euclidien sera dit symétrique s'il est localement symétrique et si toute isométrie locale qui fixe un sommet provient d'une isométrie globale.*

Comme nous l'avons déjà remarqué, les immeubles classiques sont symétriques.

Pour comprendre un peu mieux ces objets, nous avons voulu décrire complètement et explicitement certains exemples de polyèdres de rang deux, et par la même occasion, certains exemples d'immeubles euclidiens, qui, a priori, n'ont pas de raison d'être nécessairement classiques. D.I. Cartwright, A.M. Mantero, T. Steger et A. Zappa en avaient déjà obtenus, mais les polyèdres qu'ils considèrent sont un peu différents des nôtres. Le résultat que nous exposons dans le second chapitre est le suivant :

THÉORÈME 0.3 *Il existe exactement sept polyèdres de rang deux à un seul sommet dont la géométrie locale est celle de $P^2(\mathbb{F}_2)$. Ces polyèdres possèdent sept faces (des triangles équilatéraux) et sept arêtes. Cinq sont orientables et deux ne le sont pas.*

Les cinq orientables font partie des polyèdres de [CMSZ], les autres pas. La preuve que nous exposons fait appelle à de nombreuses figures, et n'utilise pas l'outil informatique. Ces objets sont intéressants pour diverses raisons. D'une part, A. Żuk a démontré récemment que les groupes fondamentaux de ces polyèdres possèdent la propriété (T) de Kazhdan. D'autre part, nous démontrons qu'ils sont automatiques en un sens très géométrique. Enfin, ils donnent naissance à au moins deux immeubles homogènes différents, modelés sur $P^2(\mathbb{F}_2)$. Et surtout, il n'est pas exclu, a priori, que les revêtements universels des deux polyèdres non orientables ne soient pas classiques. Pour les autres, le caractère classique a été prouvé dans [CMSZ].

Pour comprendre ces divers revêtements universels, nous avons essayé de décrire comment s'organise la sphère combinatoire de rayon deux (centrée sur un sommet) au-dessus du link. C'est ce qui est à l'origine du dernier chapitre. En particulier, nous sommes parvenus à résumer sur une seule figure (chapitre 3, figure 3) le théorème de J. Tits suivant :

THÉORÈME 0.4 *(J. Tits) Dans les immeubles triangulaires dont la géométrie locale est celle de $P^2(\mathbb{F}_2)$, il existe deux et seulement deux sphères de rayon deux (à isomorphisme de graphes près).*

Ce résultat nous permet de distinguer deux types de revêtements universels parmi ceux de nos polyèdres. Il y en aura trois de l'un et quatre de l'autre ; de plus les deux polyèdres non orientables ont des revêtements universels de type différent. Précisons qu'il existe beaucoup plus de deux immeubles (même classiques), de géométrie locale celle de $P^2(\mathbb{F}_2)$ (voir [T3]). Dans [CMSZ], il est montré qu'il n'y a que deux revêtements universels qui apparaissent parmi ceux de leurs polyèdres, et qu'ils sont associés aux groupes $SL_3(\mathbb{Q}_2)$ et $SL_3(\mathbb{F}_2((t)))$. Nous n'avons pas encore de réponse quant au caractère classique de nos deux polyèdres non orientables. Nous avons espoir que les méthodes décrites dans le dernier chapitre nous amèneront cette réponse.

Pour $q = 3$, il est aussi montré dans [CMSZ] qu'il existe des immeubles non classiques qui admettent des sous-groupes d'isométries qui opèrent simplement transitivement sur l'ensemble des sommets. Cela ne donne pas de polyèdre à un seul sommet dans notre sens puisqu'il n'y en a pas (pour des raisons purement combinatoires) pour cette géométrie locale (celle de $P^2(\mathbb{F}_2)$), mais ces revêtements universels sont particulièrement intéressants. Ils sont homogènes, localement symétriques ; mais on ne sait pas s'ils sont symétriques. L'étude détaillée de leur link d'ordre deux pourrait donner la réponse.

Dans le théorème 0.2, nous avons supposé que nos polyèdres étaient finis. Ce n'était pas nécessaire ; les supposer localement finis aurait suffi. On aurait encore pu affaiblir l'hypothèse et admettre aussi les polyèdres localement infinis pourvu que les angles de leurs faces aient des mesures minorées par un réel strictement positif. Cette généralisation est signalée à la fin du premier chapitre. En particulier, tout immeuble euclidien satisfait ces conditions, qu'il soit ou non classique, symétrique ou homogène. Dans le dernier chapitre, nous donnons un procédé de construction très explicite de tous les immeubles triangulaires. Cette construction utilise l'énoncé généralisé du premier chapitre et repose sur la compréhension de la manière d'empiler les sphères d'un immeuble (triangulaire), les unes

au-dessus des autres. Nous voyons apparaître certaines libertés dans la construction. Dans un premier temps, nous voyons que dans un même immeuble triangulaire, il est possible de mélanger diverses structures locales (en considérant deux plans projectifs non isomorphes, de même cardinal). Dans un deuxième temps, on peut se fixer la structure locale. Alors de cette construction basée sur une tour de links emboîtés, se dégagent encore certaines propriétés. On voit en particulier que la géométrie locale ne détermine pas la géométrie globale de l'immeuble. Nous redémontrons aussi au passage le théorème suivant :

THÉORÈME 0.5 *Il existe un infinité non dénombrable d'immeubles triangulaires deux à deux non isométriques ayant tous la même géométrie locale.*

Aussi, il est très facile de construire des exemples d'immeubles triangulaires non homogènes (même avec $q = 2$).

On dégagera une notion plus faible que la notion d'immeuble symétrique ; on qualifiera certains immeubles de *réguliers* s'ils vérifient une propriété de régularité qui se décèle au niveau du link d'ordre 2. Les immeubles symétriques seront bien sûr réguliers avec cette définition. Dès que $q \geq 4$, il nous sera possible de construire des immeubles qui ne sont pas réguliers, donc pas symétriques, tout en étant localement symétriques. De plus, ce caractère régulier nous amènera à la recherche d'immeubles extrêmement non symétriques, en ce sens qu'ils ne possèdent aucun automorphisme qui fixe un sommet. On construira un immeuble dont les automorphismes qui fixent un sommet, fixent aussi toute la sphère de rayon un centrée sur ce sommet.

Afin de déceler le caractère non classique parmi les immeubles réguliers, nous sommes parvenus à repérer à distance finie (i.e. sur les sphères de rayon n) le caractère non arguésien du plan projectif à l'infini. Ainsi, il nous est facile de construire des immeubles réguliers non classiques. Dans le cas $q \geq 3$, il existe des sphères de rayon deux qui nient la propriété de Desargues, dans le cas $q = 2$, il faut aller jusqu'à la sphère de rayon trois.

Mais ce dernier chapitre ne nous donne pas d'immeuble triangulaire *homogène* (sur les sommets) qui ne soit pas symétrique, et encore moins de polyèdre *fini* dont le revêtement universel ne soit pas symétrique. La tour des links ne maîtrise pas l'homogénéité. Si un analogue du théorème de Świątkowski (voir [S]) était vrai pour certains links d'ordre 2 que nous avons décrits dans le dernier chapitre, alors, on obtiendrait des polyèdres de rang deux extrêmement non symétriques.

Notre texte comporte de nombreuses figures. Leur numérotation repart à l'unité au début de chaque chapitre. Une exception étant faite pour le quatrième paragraphe du second chapitre, dans lequel elles sont numérotées de 100 à 307 (le chiffre des centaines faisant référence au cas illustré).

Chapitre 1

Polyèdres de dimension 2 à courbure ≤ 0 et de rang 2

1.1 Introduction

Si on se donne une variété riemannienne fermée, à tout vecteur v de son fibré unitaire tangent, on peut associer un entier noté rang(v) qui est égal à la dimension de l'espace des champs de Jacobi parallèles le long de la géodésique définie par v. Le *rang* de cette variété est le minimum des rangs des vecteurs unitaires. Avec l'aide des résultats de W. Ballmann, M. Brin, P. Eberlein et R. Spatzier dans [BBE] et [BBS], K. Burns et R. Spazier ont montré dans [BurS] que toute variété fermée à courbure ≤ 0, de rang ≥ 2 et irréductible est localement symétrique.

B. Kleiner s'est intéressé à des résultats analogues pour des espaces singuliers. Pour lui, un espace métrique est de rang $\geq k$ si toute géodésique est contenue dans un k-plat. Son résultat (non publié) est le suivant : tout polyèdre à courbure ≤ 0 de dimension k, irréductible et de rang k a pour revêtement universel un immeuble euclidien (au sens de Tits).

Dans ce chapitre, nous étudions les polyèdres finis de dimension 2 à courbure ≤ 0. Nous dirons qu'un tel polyèdre P est de rang 2 si tout germe de géodésique (i.e. un germe d'immersion isométrique de $\mathbb{R}$ dans P) se prolonge en un germe de plat (i.e. un germe d'immersion isométrique de $\mathbb{R}^2$ dans P). L'un des résultats de ce chapitre est que cette définition locale, qui nous semble très naturelle, entraîne que toute géodésique globale (i.e. une immersion isométrique de $\mathbb{R}$) se prolonge en un plat global c'est-à-dire une immersion isométrique de $\mathbb{R}^2$ (théorème 2). Nous obtenons par ailleurs une preuve élémentaire du résultat de B. Kleiner en dimension 2 et ceci nous permet d'obtenir une description très précise de ces polyèdres à courbure ≤ 0 et de rang 2 (théorème 3).

Alors que nous étions en cours de rédaction, nous avons reçu une prépublication de W. Ballmann et M. Brin qui contient des résultats très proches des nôtres. Ces auteurs prennent cependant comme définition de la propriété de rang 2 le fait que toute géodésique *globale* borde un *demi*-plat *global*.

1.2 Sur les immeubles de dimension un

Dans ce qui suit, nous ne distinguerons pas un graphe combinatoire de l'espace topologique qu'il définit.

Définition 1.2.1 *Un* ***immeuble combinatoire*** *(sphérique) de dimension un est la donnée d'un graphe, dont les arêtes seront appelées chambres et d'une famille de sous graphes appelés appartements tels que :*

1. *chaque appartement est un cercle composé de $2N$ arêtes pour un certain N fixé ;*
2. *deux chambres quelconques sont contenues dans un même appartement ;*
3. *si deux appartements ont une chambre en commun, il y a un isomorphisme de graphes de la réunion de ces deux appartements, qui envoie l'un sur l'autre en fixant l'intersection point par point.*

EXEMPLES.

- Considérons deux sommets reliés par n arêtes ($n \geq 2$, éventuellement $n = \infty$). Un appartement est donné par deux arêtes distinctes. On vérifie aisément les axiomes (pour $N = 1$, voir figure 1).

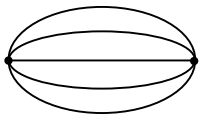


Figure 1

- Sur un ruban de Möbius, on place six sommets sur le bord, qui se trouve ainsi découpé en six arêtes. On ajoute trois autres arêtes en reliant chaque sommet à l'opposé. Les appartements sont tous les cycles de longueur 4 (i.e comprenant 4 arêtes). Comme l'intersection de deux tels cycles est connexe, les axiomes sont faciles à vérifier (voir figure 2). Ce graphe n'est autre que le graphe biparite $K_{3,3}$.

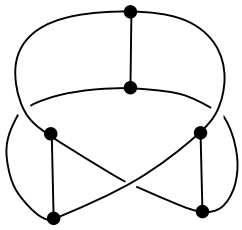


Figure 2

Définition 1.2.2 *On parlera d'un* ***immeuble combinatoire*** *(euclidien) si l'axiome 1. de la définition précédente est remplacé par le suivant :*
1'. chaque appartement est une droite.

EXEMPLE. Considérons un arbre sans feuille (i.e. sans sommet de valence un). Prenons toutes les droites comme famille d'appartements. Un appartement est donc déterminé par une paire de points sur le bord à l'infini. L'intersection de deux droites étant connexe, l'axiome *3.* est facilement vérifiable. L'axiome *2.* est aussi évident.

Pour un arbre homogène, il n'est pas nécessaire de considérer toutes les droites pour former la famille des appartements. On peut par exemple en enlever un nombre fini (l'axiome *2* sera toujours vérifié).

Proposition 1.2.1 • *Dans un immeuble sphérique, les appartements sont exactement tous les cycles de longueur minimale.*

• *Un immeuble euclidien est un arbre.*

DÉMONTRATION. Dans le cas sphérique, considérons un cycle de longueur minimale n et montrons que c'est un appartement. Si $n = 2$, le seul appartement qui peut contenir les deux chambres qui composent le cycle considéré est lui-même. Supposons désormais $n \geq 3$. Notons $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les arêtes de notre petit cycle (dans l'ordre cyclique).

C_1 et C_2 sont dans un même appartement Σ_2. Aussi, C_1 et C_3 sont dans un même appartement Σ_3.

L'isomorphisme entre ces deux appartements qui fixe C_1, fixe aussi le sommet commun à C_2 et C_3. Donc Σ_3 connecte C_1 à C_3 par l'intermédiaire d'une seule chambre. Cette chambre est nécessairement C_2, sinon on aurait un cycle de longueur 2. L' appartement Σ_3 contient donc C_1, C_2 et C_3.

Supposons $n = 2m$ et itérons ce procédé pour arriver au fait que C_1, $C_2, ..., C_{m+1}$ sont dans un même appartement. En parcourant le cercle dans l'autre sens, on trouve un appartement qui contient C_1, C_{2m}, ..., C_{m+1}. Si ces appartements n'étaient pas confondus, il existerait un isomorphisme entre eux qui fixerait C_1 et C_{m+1}. Ceci entraînerait l'existence d'un cycle plus petit (voir figure 3). Donc $C_1, ..., C_n$ forment un appartement.

Si $n = 2m + 1$, la preuve convient avec les mêmes notations. Et ce cas ne se produit donc pas puisqu'un appartement a une longueur paire.

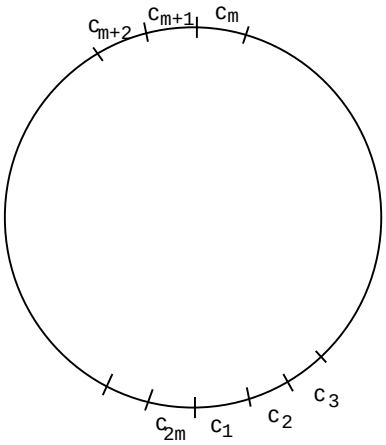


Figure 3

Considérons maintenant un immeuble euclidien qui aurait des cycles. Choisissons-en un de longueur minimale et suivons le même raisonnement que précédemment. On trouve alors deux appartements, l'un contenant C_1, C_2, ..., C_{m+1}, l'autre C_1, $C_{2m}, ...,$ C_{m+1}. Mais ceci n'est pas possible car il y a un isomorphisme qui envoie l'un sur l'autre en fixant l'intersection (voir figure 4).□

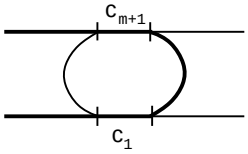


Figure 4

REMARQUE. L'intersection de deux cycles de longueur minimale est soit connexe, soit composée de deux sommets diamétralement opposés dans les deux cycles.

1.3 Sur les immeubles métriques de dimension un

On dira qu'un graphe est métrique si on a associé une longueur non nulle pour chaque arête. La longueur d'un chemin de sommet à sommet dans un graphe métrique n'est plus le nombre d'arêtes qui le compose, mais la somme de leur longueur.

Définition 1.3.1 *Un* ***immeuble métrique*** *(sphérique) de dimension un est un graphe métrique fini et connexe dont les sommets sont de valence* ≥ 3 *et tel que :*

1. *(ample) Tous les cycles sont de longueur* $\geq 2\pi$.
2. *(rang 2) Deux points séparés par un chemin simple de longueur* $\geq \pi$ *sont contenus dans un cycle de longueur égale à* 2π.

EXEMPLE. Un immeuble combinatoire définit un immeuble métrique en prenant π/N comme longueur pour toutes les arêtes.

REMARQUES.

- La condition *2.* demande en particulier que le diamètre d'un immeuble soit $\leq \pi$.
- Dans un immeuble métrique, un chemin simple de longueur π se complète en un cycle de longueur 2π. En effet, on sait que les deux extrémités d'un chemin simple de longueur π sont dans un cycle de longueur 2π. D'après *1.*, ces deux extrémités ne peuvent être que diamétralement opposées dans ce cycle.
- On peut remplacer la condition *2.* par la suivante: "Deux points quelconques se trouvent dans un cycle de longueur 2π". Cette condition est clairement plus forte que la condition *2.*. Vérifions qu'un immeuble métrique la satisfait. Considérons donc deux points séparés par un chemin de longueur $< \pi$. Comme un immeuble n'a pas de feuille et grâce au point *1.*, on peut prolonger ce chemin en un chemin simple de longueur π qui se complète, on l'a vu, en un cycle de longueur 2π.
- Si deux petits cycles (de longueur 2π) se rencontrent, on a un isomorphisme métrique qui envoie l'un sur l'autre en fixant l'intersection. Car si l'intersection n'est pas connexe, il s'agit de deux points diamétralement opposés dans les deux cycles.

On commence à s'apercevoir que les propriétés des immeubles métriques sont les mêmes que celles des immeubles combinatoires. Cependant, on ne sait pas a priori que les arêtes ont toutes la même longueur.

Considérons un arbre fini, muni d'un point base (la racine). On suppose d'une part que toutes ses feuilles sont à la même distance N (combinatoire) de la racine, d'autre part qu'il y a deux valences qui s'alternent (c'est-à-dire que deux sommets à distance 2 ont même valence). Appelons branche une composante connexe de l'arbre privé de sa racine. Identifions certaines feuilles de telle sorte que chaque feuille soit identifiée à exactement une feuille de chacune des branches. Enfin, attribuons la longueur π/N à chaque arête du graphe ainsi obtenu.

Proposition 1.3.1 *Tout immeuble métrique est obtenu par le procédé décrit ci-dessus.*

DÉMONTRATION. Dans un graphe métrique, fixons un sommet (la racine) et faisons croître le rayon des boules centrées en ce point. Découpons notre preuve en plusieurs étapes.

1. Si un cycle se forme dans la boule de rayon l, sa longueur est $\leq 2l$. Donc avant le rayon π, notre boule est un arbre.

2. Puisqu'un immeuble a un diamètre $\leq \pi$, la boule de rayon π le recouvre totalement.

3. Notre immeuble est donc obtenu en identifiant certaines feuilles d'un arbre de hauteur π. Remarquons que deux feuilles d'une même branche ne peuvent se recoller l'une sur l'autre (un cycle trop petit se créerait). Aussi, deux branches sont toujours connectées par l'intermédiaire de l'une de leurs feuilles. Sinon, un chemin simple de longueur π centré sur la racine dont une extrémité serait dans une branche et une autre dans une deuxième qui ne lui serait pas reliée, ne pourrait pas se compléter en un cycle de longueur 2π.

4. Pour que les points de la sphère de rayon π soient des sommets, il faut qu'il y ait toujours au moins trois feuilles qui se recollent ensemble. Supposons qu'en un point F de la cime, seulement deux feuilles se recollent. La racine O étant de valence ≥ 3, soit un point A proche de O dans une branche ne contenant pas F. Aussi, soit B un point proche de F à une distance π de A. Alors le chemin de A à B de longueur π ne peut se compléter en un cycle de longueur 2π (voir figure 5).

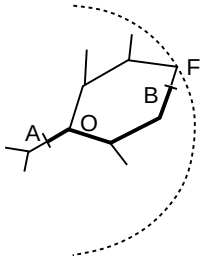


Figure 5

5. On a vu dans ce qui précédait qu'un chemin simple de longueur π qui part d'un sommet aboutit nécessairement à un sommet. Considérons des chemins de longueur π qui partent d'un point mobile X et qui passent par O (voir figure 6). Dès que X va coïncider avec le sommet voisin S, les extrémités de ces chemins vont coïncider avec des sommets. On vient donc de montrer qu'autour d'un sommet O, de valence v, $v-1$ quelconques des arêtes qui partent sont de même longueur. Ainsi, toutes les arêtes de notre immeuble ont même longueur. Et s'il y a N arêtes de O aux feuilles, c'est que les arêtes ont pour longueur π/N.

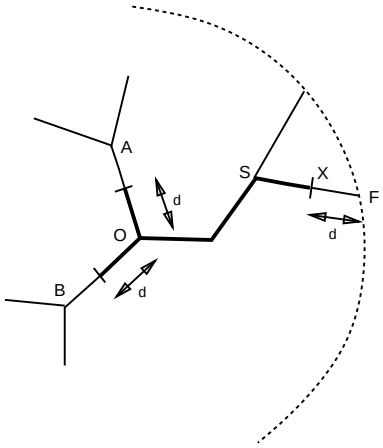


Figure 6

6. Les points 3. et 4. nous informent que la valence de O est la même que celles des points de la sphère de rayon π. On va utiliser ce fait en faisant pousser un arbre à partir du sommet S. On observe que les voisins de O des branches ne contenant pas S (A et B sur la figure 6) ont même valence, et par suite, tous les voisins de O ont même valence. Ainsi, deux sommets à distance 2 ont même valence. En d'autres termes, il y a (au plus) deux valences qui s'alternent.

Nous avons mis en évidence toutes les propriétés qui démontrent notre proposition. □

THÉORÈME 1.1 *Les immeubles métriques ne sont autres que des immeubles combinatoires (dont toutes les arêtes ont pour longueur π/N).*

DÉMONSTRATION. On a déjà vu qu'un immeuble sphérique était aussi un immeuble métrique. Considérons un immeuble métrique. Bien sûr, la famille d'appartements sera composée des cycles de longueur 2π. La proposition précédente nous dit qu'il y a $2N$ chambres par appartement. Le fait que deux chambres soient dans un même appartement résulte du fait que deux points sont toujours dans une même cycle de longueur 2π. Pour finir, l'isomorphisme métrique entre deux appartements qui auraient une partie commune est bien un isomorphisme de graphes puisque les arêtes ont toutes même longueur.□

Proposition 1.3.2 *Un immeuble métrique dont tous les cycles sont de longueur égale à 2π est composé de deux sommets reliés par des arêtes de longueur π.*

DÉMONSTRATION. Il faut voir qu'il ne peut y avoir de ramification dans l'arbre qu'on fait pousser jusqu'à la hauteur π dans le théorème 1. Imaginons un instant qu'il y en ait. Alors il est facile de trouver un cycle de longueur $> 2\pi$ (voir figure 7): partons d'une feuille a d'une branche B_1 et relions-la à une feuille différente b d'une autre branche B_2 en passant pas O. Ensuite, complétons le chemin dans une troisième branche B_3. □

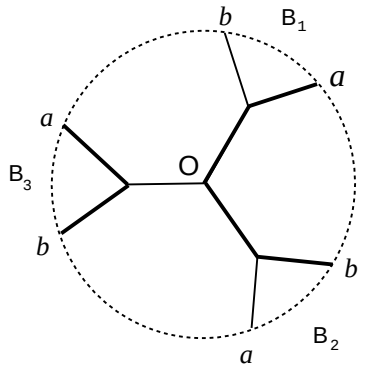


Figure 7

On notera $T_{n,m}$ l'arbre où les deux valences n et m s'alternent et T_n l'arbre homogène de valence n. On a vu que le revêtement universel d'un immeuble métrique était précisément un de ces arbres. Par exemple, pour $N = 2$ et 3, il existe un unique immeuble dont le revêtement universel est l'arbre T_3. L'unicité est facile à voir sur un dessin (voir figure 8). Quant à l'existence, on en a déjà parlé dans le cas $N = 2$ et dans le cas $N = 3$, on obtient le graphe des drapeaux du plan projectif sur le corps fini à 2 éléments (voir [Bro]).

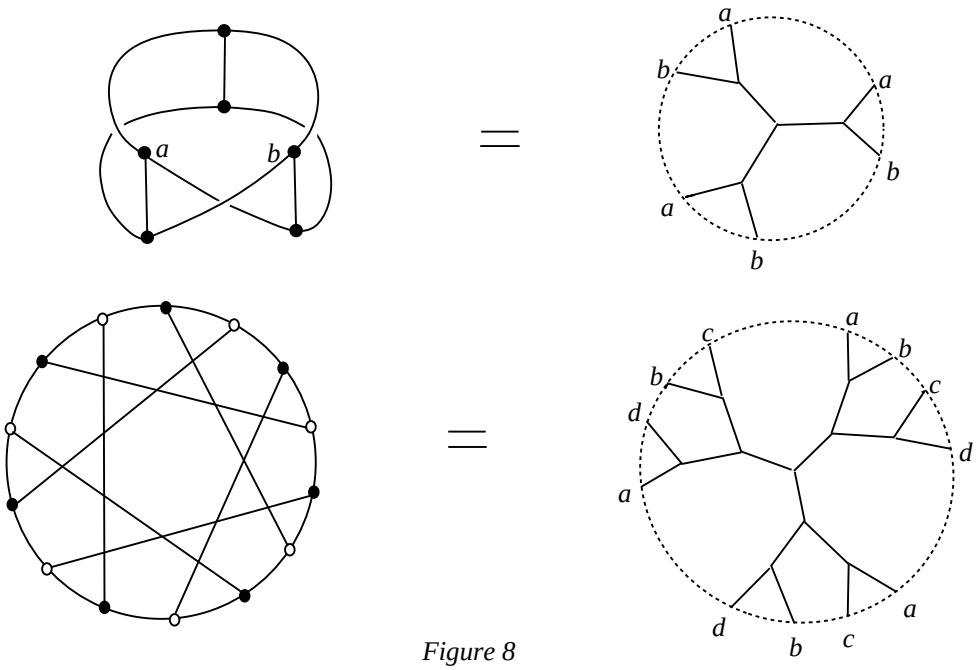


Figure 8

Désormais, on dira immeuble pour immeuble métrique, sachant qu'il s'agit aussi d'un immeuble combinatoire. Voyons maintenant une réciproque à la proposition 3.1.

Proposition 1.3.3 *Quand $N = 2$, le procédé décrit dans la proposition 3.1 fournit un unique graphe (à isomorphisme près). De plus, il s'agit d'un immeuble (carré).*

DÉMONSTRATION. L'unicité est évidente (voir figure 9).

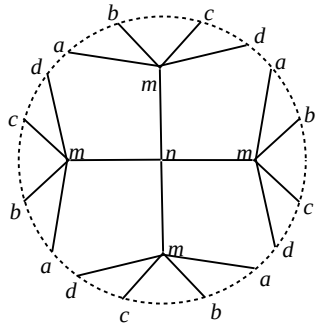


Figure 9

Notons que ce graphe comporte n sommets de valence m et m sommets de valence n ; donc $n + m$ sommets au total. Aussi, il aura nm arêtes. Il s'agit du graphe bipartite complet à n sommets de valences m, et m de valence n. (voir figure 10)

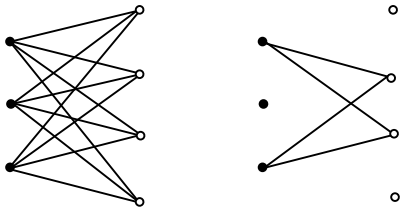


Figure 10

Un petit cycle est la donnée de deux points quelconques de valence n et de deux autres de valence m (soit un papillon). Il est donc clair que deux arêtes quelconques se trouvent dans un papillon (un appartement). □

Tout ce que nous avons fait jusque là avait pour but de pouvoir définir des objets de dimension deux et de mieux les comprendre.

1.4 Polyèdres à courbure ≤ 0 de rang 2

Considérons la réalisation géométrique d'un 2-complexe simplicial fini connexe et équipons chaque face triangulaire d'une métrique euclidienne qui rend les côtés géodésiques et qui donne la même longueur à deux côtés identifiés. La distance sur cet espace sera la distance de longueur associée (i.e. la borne inférieure des longueurs des lignes polygonales). Nous conviendrons d'appeler **polyèdre** un tel espace métrique. Donnons quelques exemples. Un cube, un tétraèdre, mais aussi deux tétraèdres collés suivant une face ou bien un sommet, sont des polyèdres.

Considérons un point d'un polyèdre. Les sphères centrées en ce point sont des graphes, tous isomorphes pour des rayons assez petits. Le graphe métrique obtenu en attribuant à chaque arête la longueur angulaire, sera appelé le **link**. On effacera les sommets de valence 2. Pour donner un exemple, sur le recollement de deux tétraèdres réguliers suivant une face, distinguons divers points et précisons leur link (voir figure 11).

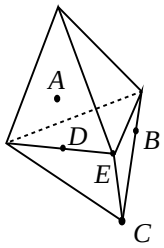


Figure 11

– En un point comme A ou B, le link est un cercle de longueur 2π.

- Le link en C est un cercle de longueur π. Il s'agit d'une singularité conique de courbure $2\pi - \sum angles = +\pi$.
- En D la singularité est du type livre. Le link est le graphe où trois arêtes de longueur π relient deux sommets. C'est un immeuble.
- Le link en E n'est pas un immeuble, les arêtes n'ont pas toutes même longueur. Rappelons qu'on a effacé les sommets de valence deux.

REMARQUE. Étant donné un graphe fini, sans feuille, on peut réaliser *un morceau* de polyèdre (le voisinage d'un sommet) dont le link en son sommet soit précisément ce graphe. Topologiquement, c'est le cône sur le graphe. Il suffit en fait de recoller des secteurs dont les angles sont les longueurs d'arêtes (qui sont dans l'intervalle $]0, +\infty[$).

Le **lieu singulier** d'un polyèdre est l'ensemble des points au voisinage desquels il n'est pas localement isométrique à un plan euclidien. C'est aussi l'ensemble des points où le link n'est pas un cercle de longueur 2π. Le lieu régulier est le complémentaire.

Définition 1.4.1 *Un polyèdre est* ***à courbure*** ≤ 0 ***et de rang 2*** *si les links en chacun de ses points singuliers sont des immeubles métriques.*

En demandant que les links soient connexes, on écarte le cas trivial du recollement de deux polyèdres suivant un point. Par ailleurs, cette définition exclut l'existence de bord, c'est-à-dire d'arête qui ne serait contenue que dans une seule face.

Voyons pourquoi cette définition formalise bien le concept de rang 2 dont on a parlé dans l'introduction. On considère des polyèdres finis sans bord, et la condition *(ample)* sur les links correspond à l'hypothèse de courbure ≤ 0 au sens général (espace CAT(0)). Voilà pour l'analogue de l'hypothèse "*fermée à* $K \leq 0$" sur les variétés. Les géodésiques se prolongent alors indéfiniment et sont caractérisées par le fait que dans le link en un point, le rayon incident et le rayon repartant correspondent à deux points à distance $\geq \pi$. Toujours dans le link en un point, un germe de plat (ou plat local) correspond à un cercle de longueur 2π ; la condition de rang 2 se traduit donc sur les links en ces termes : deux points à distance $\geq \pi$ (i.e. germe de géodésique) se trouvent dans un cercle de longueur 2π (i.e. un germe de plat).

Donnons quelques exemples.

- Sur deux tores plats, considérons deux géodésiques de même longueur. Puis recollons ces tores suivant ces géodésiques (voir figure 12).

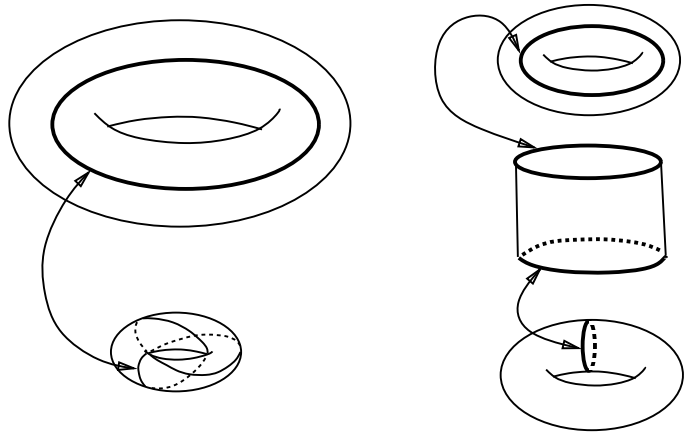


Figure 12

- Considérons une géodésique de longueur 1 sur un tore plat et une autre de longueur 2 sur un autre tore plat. Recollons ces deux tores via un cylindre de circonférence 2 en enroulant deux fois un bout du cylindre sur la géodésique de longueur 1 et une fois l'autre bout sur celle de longueur 2 (voir figure 12).

- Les deux exemples précédents n'ont que des singularités de type livre. Pour le suivant, il n'en est rien. À l'aide de deux paires de géodésiques parallèles, découpons un tore plat en 4 rectangles. Recollons chaque géodésique avec celle qui lui est parallèle. Ainsi, on obtient un polyèdre avec un seul sommet et dont le lieu singulier est un bouquet de 4 cercles (voir figure 13). Le link au sommet singulier est l'immeuble carré T_4. On a donc bien décrit un polyèdre à courbure ≤ 0 de rang 2. Il s'agit en fait du produit de deux 8.

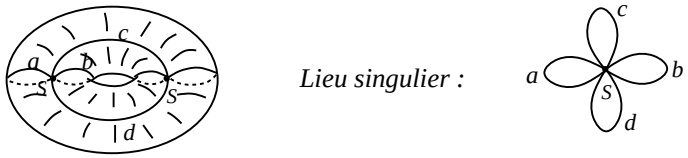


Figure 13

Attention! Dans le second exemple, il ne faut pas s'égarer et croire qu'à la place du cylindre intermédiaire on aurait tout aussi bien pu mettre un tronc de cône dont un bout aurait eu pour longueur 2 et l'autre 1. Les bords de ce tronc ne sont plus géodésiques! On sort de notre catégorie des polyèdres. On aurait pu admettre ce genre d'objets dans notre définition d'un polyèdre, mais la condition de rang deux les aurait exclus immédiatement.

Dans ce qui suit, notre but est de classifier les polyèdres à courbure négative ou nulle et de rang 2. Considérons un tel polyèdre. Son lieu singulier, qu'on supposera non vide (on connaît déjà les surfaces fermées plates), est un graphe.

Proposition 1.4.1 *Une fois complétée, une composante connexe du lieu régulier est*

- *ou bien isométrique à un cylindre plat à bords géodésiques,*
- *ou bien isométrique à une bande de Möbius plate dont le bord est géodésique,*
- *ou bien isométrique à un polygone convexe du plan euclidien.*

DÉMONSTRATION. Le complété d'une composante connexe est une surface plate, à bord convexe (on connaît la structure des links). La formule de Gauss-Bonnet nous informe que seulement trois cas sont possibles. Ou bien la surface en question est homéomorphe à un cylindre plat à bords géodésiques, ou bien à une bande de Möbius plate à bord géodésique, ou bien à un disque plat à bord polygonal. On appellera *face* uniquement une composante de ce dernier type. On verra plus loin (proposition 4.3) que les faces ont au plus quatre sommets. Il sera alors clair qu'elles sont isométriques à des polygones convexes du plan euclidien. □

Proposition 1.4.2 *Si le lieu singulier contient un cercle comme composante connexe, alors, le polyèdre n'a pas de face polygonale et n'a que des singularités de type livre.*

DÉMONSTRATION. Considérons un cercle qui est une composante du lieu singulier d'un polyèdre à courbure ≤ 0 de rang 2. Le long de ce cercle la singularité est du type livre. En suivant une page en longeant ce cercle, on s'aperçoit qu'elle s'enroule un certain nombre de fois autour. Ainsi, le $\varepsilon-$ voisinage de ce cercle singulier s'obtient en recollant un certain nombre de cylindres suivant un de leurs bords.

Considérons une géodésique fermée g sur l'un de ces cylindres (une composante du bord du $\varepsilon-$ voisinage) et éloignons-la progressivement du cercle singulier (voir figure 14). Considérons alors un premier point du lieu singulier qu'elle va rencontrer. En ce point, le link ne peut correspondre qu'à une singularité de type livre car il doit comporter une arête de longueur $\geq \pi$. La composante connexe de ce point dans le lieu singulier est donc elle aussi un cercle. En itérant ce procédé, on recouvre tout le polyèdre. □

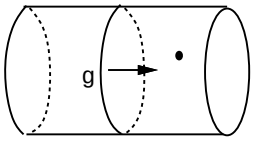


Figure 14

Proposition 1.4.3 *Les faces d'un polyèdre sont ou bien toutes rectangulaires, ou bien toutes des triangles. Dans ce cas, il n'y a que trois triangles possibles (à similitude près) : l'équilatéral, le rectangle isocèle et le demi-équilatéral.*

DÉMONSTRATION. On voit facilement, en calculant la somme des angles intérieurs par la formule de Gauss-Bonnet, qu'une face est au plus un quadrilatère et que dans ce cas c'est un rectangle :

$$\frac{\pi}{n_1} + ... + \frac{\pi}{n_k} = (k-2)\pi \quad \Longrightarrow \quad k \leq 4$$

et on ne peut avoir $k = 4$ que si $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 2$. Aussi, si une face est un rectangle, tous les links aux sommets sont des immeubles carrés et ainsi toutes les faces sont des rectangles.

S'il s'agit de triangles, en résolvant l'équation bien connue

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 \quad ,$$

on constate qu'il n'y a que trois types possibles pour chacun des triplets suivants : (3,3,3), (2,4,4) et (2,3,6). Dans le premier cas, il s'agit d'un triangle équilatéral, dans le second d'un triangle rectangle isocèle, et dans le dernier d'une équerre d'écolier (i.e. un demi triangle équilatéral). □

À partir de maintenant, nous nous intéresserons au revêtement universel $\widetilde{P}$ d'un polyèdre P à courbure ≤ 0 de rang 2. On appellera *plat* un plongement isométrique du plan euclidien dans $\widetilde{P}$. Puisque $\widetilde{P}$ est un espace complet, simplement connexe et à courbure ≤ 0, c'est un espace de Hadamard. Nous allons utiliser certaines propriétés de ces espaces, en particulier que les géodésiques n'ont pas de self-intersection et que deux géodésiques ne peuvent se couper qu'une seule fois.

THÉORÈME 1.2 *(rang 2 global) Dans le revêtement universel d'un polyèdre à courbure ≤ 0 de rang 2, toute géodésique est contenue dans un plat.*

DÉMONSTRATION. Compte tenu des propositions précédentes, nous pouvons dorénavant supposer que les faces de notre polyèdre sont des polygones (triangles ou rectangles) du plan euclidien. Dans l'autre cas, le théorème est clair puisque $\widetilde{P}$ est le produit d'un arbre et d'une droite.

Remarquons qu'il y a deux types de géodésiques. Celles qui coupent les arêtes transversalement (cas 1) et les autres (cas 2). En effet, une géodésique qui coïnciderait avec une arête singulière sur un segment, coïncide en fait tout du long avec des arêtes singulières (en traversant un sommet, elle ne peut repartir que le long d'une arête singulière opposée).

Notre raisonnement se fera en deux étapes et dans chacune, on distinguera les deux cas qu'on vient de séparer. La première associera à une géodésique une bande formée de faces visitées. Dans la seconde, on élargira cette bande pour former un plat.

ÉTAPE 1

Nous allons construire une bande plate contenant la géodésique. Cette construction se fera progressivement en parcourant la géodésique. Les adhérences de toutes les faces qui vont former notre bande auront une intersection non vide avec notre géodésique (elle les visite).

Cas 1 Le seul problème qui se pose dans la construction suggérée par la propriété souhaitée annoncée plus haut, est le passage au travers d'un sommet. La géodésique impose le choix de deux faces opposées, c'est-à-dire deux chambres opposées dans le link. L'une des propriétés des immeubles est que deux chambres opposées se trouvent dans un même appartement et un seul. Ajoutons donc les faces qui composent cet appartement.

Cas 2 Au niveau d'une arête qui est un morceau de la géodésique, prenons deux faces quelconques qui la contiennent. Essayons de prolonger la construction de notre bande voisinage. Traduisons sur le link le problème qui se pose en traversant un sommet : étant donnés deux arêtes C_1 et C_2 ayant A pour sommet commun, et un sommet B opposé à A, y-a-t-il un appartement qui contienne à la fois C_1, C_2 et B?

Lemme 1.4.1 *(sur les immeubles de dimension un) La réponse à la question précédente est oui.*

DÉMONSTRATION. Il y a un appartement Σ_1 (resp. Σ_2) qui contient C_1 (resp. C_2) et B. Dans ces deux appartements, A et B sont bien sûr opposés et les coupent donc en deux moitié ; si bien que l'appartement formé de la moitié de Σ_1 qui contient C_1 suivie de celle de Σ_2 qui contient C_2 répond à la question (voir figure 15). Ici encore, cet appartement est unique. □

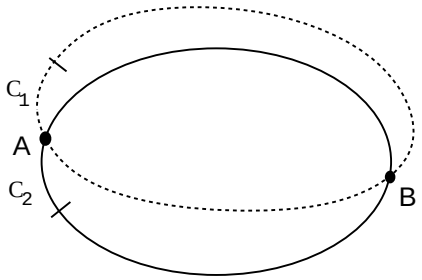


Figure 15

Nous avons déterminé une bande plongée dans $\widetilde{P}$ qui contient la géodésique. C'est une bande d'un des trois pavages réguliers en triangles ou bien d'un quadrillage en rectangles. Son bord est formé de deux lignes polygonales. Un point du bord sera appelé **bosse** (resp.

creux) si l'angle en ce point est $< \pi$ (resp. $> \pi$) ; c'est-à-dire si strictement moins (resp. plus) de N faces viennent se recoller en ce point (voir figure 16).

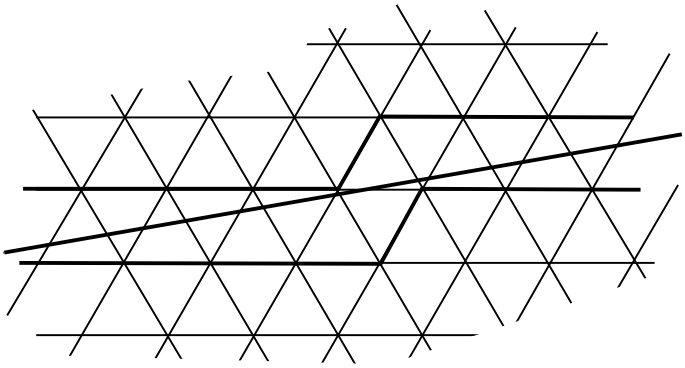


Figure 16

ÉTAPE 2

Dans cette étape, nous élargissons la bande trouvée dans l'étape précédente. Cette construction sera faite pas à pas en comblant progressivement les creux. Le même raisonnement sera adopté pour les deux composantes de bord. Désormais, on dira le bord pour l'une d'entre elles. Mettons en évidence la propriété fondamentale suivante :

Propriété 1.4.1 • *En un sommet du bord, ne viennent se recoller qu'au plus $N+1$ faces (s'il y a $2N$ chambres par appartement dans le link en ce point).*

• *Sur le bord, deux creux sont toujours séparés par une bosse (il n'y a jamais deux creux qui se suivent).*

Vérifions cette propriété pour la bande initiale. Pour la première partie, il suffit de transporter la géodésique parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'elle passe par le sommet du bord considéré. Alors, puisque toutes les faces sont visitées, au plus $N+1$ viennent se recoller en ce point (voir figure 17).

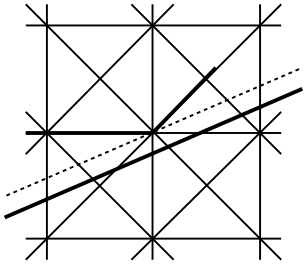


Figure 17

Pour la seconde, supposons que deux creux se suivent. Alors, la géodésique ne peut pas visiter les $N+1$ faces de chaque creux (voir figure 18) ; l'une des deux faces grisées ne sera pas visitée.

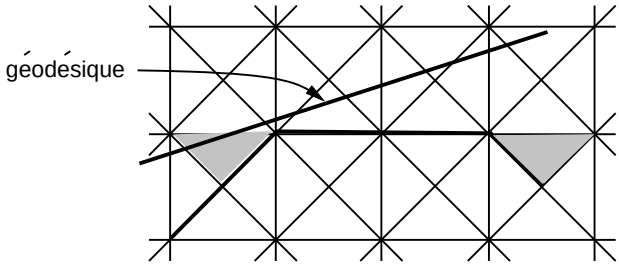


Figure 18

Le lemme suivant sera fondamental dans notre démarche :

Lemme 1.4.2 *(Sur les immeubles de dimension un) Dans un immeuble de dimension un, on peut compléter tout chemin (simple) formé de $N+1$ arêtes en un cycle de longueur 2π.*

DÉMONSTRATION. Prenons un sous-chemin de longueur π qui contient les N sommets intérieurs au chemin initial dans son intérieur. On sait que ce chemin se complète en un cycle de longueur 2π. Or ce cycle ne peut que contenir le chemin initial formé des $N+1$ arêtes. Là encore, ce cycle est unique. □

Décrivons maintenant un procédé qui permet d'élargir la bande en comblant les trous. Comme pour l'étape 1, le pas de base consiste à border un sommet du bord par des faces qui auront au moins ce sommet en commun avec la bande. En d'autres termes, on ajoute un morceau de plat contenant ce sommet. Dans le cas où les faces de notre polyèdre sont des rectangles (resp. des triangles équilatéraux), il est très facile d'élargir la bande. Il suffit d'ajouter des rectangles (resp. des triangles équilatéraux) dans les creux dans un ordre quelconque ; on peut le faire grâce au lemme 4.2. Dans la suite, nous supposerons donc que les faces sont ou bien rectangles isocèles ou bien des équerres. Il s'agit maintenant de définir un ordre pour combler les creux. Ayons en tête comme image la figure 19.

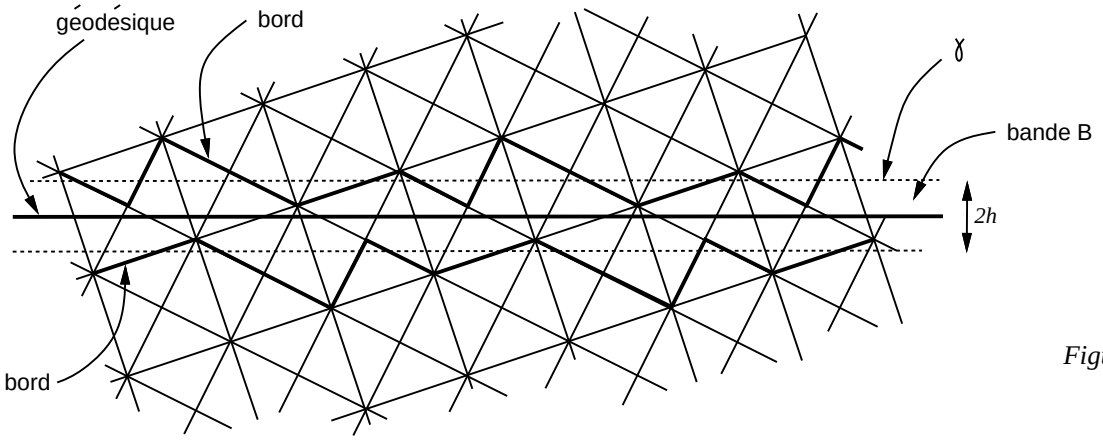


Figure 19

Distinguons encore deux cas :

Cas 1 Le bord est une droite parallèle à la géodésique. Le lemme 2 nous permet d'ajouter une couche, sommet après sommet. Alors, on considère l'ancien bord comme

notre nouvelle géodésique et on reprend notre raisonnement. La propriété fondamentale sera encore satisfaite (voir figure 20).

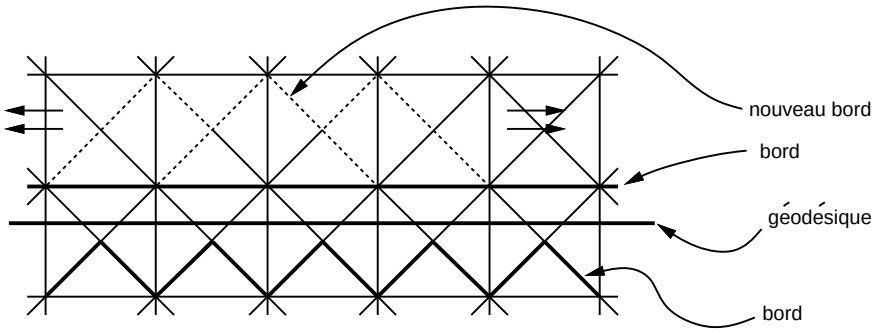


Figure 20

Cas 2 Le bord présente creux et bosses. Comme dans le cas précédent, en comblant les creux d'une manière qu'on va définir, on pourra remplacer notre géodésique par une autre, parallèle et à une distance h que l'on va déterminer en fonction du type de faces.

Dans le cas des équerres, h est la plus courte des hauteurs (issues des sommets marqués) des trois triangles grisés (voir figure 21).

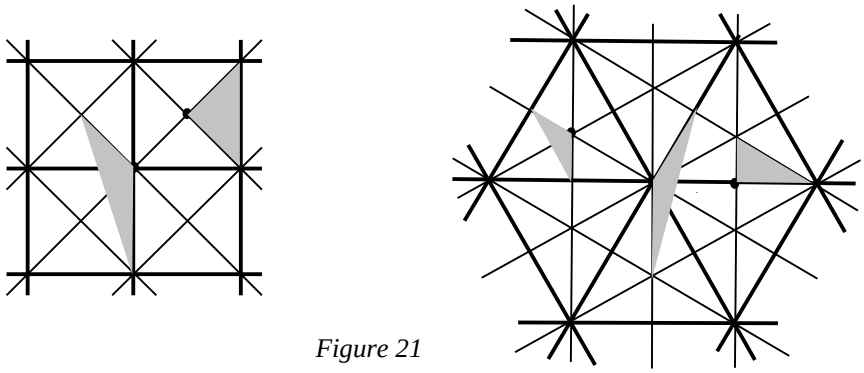


Figure 21

Ils correspondent aux trois creux possibles dans un tel pavage. Dans le cas des rectangles isocèles, il n'y a que deux triangles à considérer, h est encore la plus courte des deux hauteurs.

Soit B la bande fermée du plan de largeur h bordée d'un côté par la géodésique, de l'autre par une parallèle γ , du côté du bord qui nous occupe. Vérifions les deux points suivants (voir figure 19) :

- Les bosses se trouvent hors de B,
- L'un des deux sommets voisins d'un creux se trouve hors de B.

Pour le voir, il suffit de constater que la largeur h a été choisie pour cela ; la bande est suffisamment fine.

Pour chaque creux dans B, opérons comme suit : tout d'abord, ajoutons $N-1$ triangles autour du creux pour former un plat local ; ensuite, on en fait de même avec le nouveau creux éventuellement créé dans la bande B (c'est-à-dire le sommet voisin qui serait dans B).

Les opérations sur les creux n'interfèrent pas entre-elles. La droite γ se trouve alors à l'intérieur de notre nouvelle bande. De plus, les adhérences de toutes les faces que nous avons ajoutées ont un intersection non vide avec γ. Il en est donc de même pour toutes les adhérences des faces qui touchent le bord. Considérons donc γ comme notre nouvelle

géodésique. La propriété fondamentale sera bien sûr encore vérifiée.

Ainsi la bande s'élargit d'une longueur h après chaque étape. On définit bien par ce procédé un plat. □

REMARQUE (sur l'unicité). Les seules géodésiques qui ne soient pas contenues dans un *unique* plat sont les parallèles aux directions du pavage. Nous l'avons remarqué au cours des lemmes précédents, mais on peut le voir autrement : un convexe du plan qui contient une droite D est nécessairement une bande dont les bords sont des droites parallèles à D (ou bien la droite D elle-même). Et on sait que l'intersection de deux plats est convexe, puisque l'intersection de deux convexes.

Nous pouvons maintenant énoncer un théorème de classification.

THÉORÈME 1.3 *Les polyèdres à courbure ≤ 0 de rang 2 se classent en deux catégories :*

1. (cas non irréductible) a) ***Les cylindres plats ou bandes de Möbius*** *recollés suivant leurs bords. Le lieu singulier est alors une union de cercles disjoints dont les longueurs sont en rapports rationnels. Les singularités sont de type livre. Le revêtement universel est le produit d'un arbre et d'une droite.*

b) Les recollements de ***rectangles*** *suivant leurs bords. Chaque arête de rectangle est singulière, chaque sommet est singulier. Les links en chaque sommet sont des immeubles carrés. Le revêtement universel est le produit de deux arbres.*

2. (cas irréductible) Les recollements de ***triangles*** *tous isométriques suivant leurs bords. Il y a trois types de triangles possibles :*

a) équilatéral, b) rectangle isocèle, c) équerre (2,3,6).

Comme dans le point précédent, chaque arête et chaque sommet sont singuliers. Les links en chacun des sommets sont des immeubles métriques avec (suivant les cas et les sommets) :

a) $N = 3$, b) $N = 2$ ou $N = 4$, c) $N = 2,\ 3$ ou 6.

De plus, pour cette catégorie, le revêtement universel est un immeuble euclidien de dimension 2 (au sens de Tits).

DÉMONSTRATION. D'après les propositions 4.2 et 4.3, on sait que si on ne se trouve pas dans la catégorie $1.a)$, le polyèdre à courbure ≤ 0 de rang 2 est le recollement de faces ou bien toutes rectangulaires, ou bien de l'un des trois types $a)$, $b)$ ou $c)$. Les parties $1.a)$ et $1.b)$ du théorème sont maintenant claires. Pour préciser que le revêtement universel dans ce cas est le produit de deux arbres, on peut faire la figure suivante :

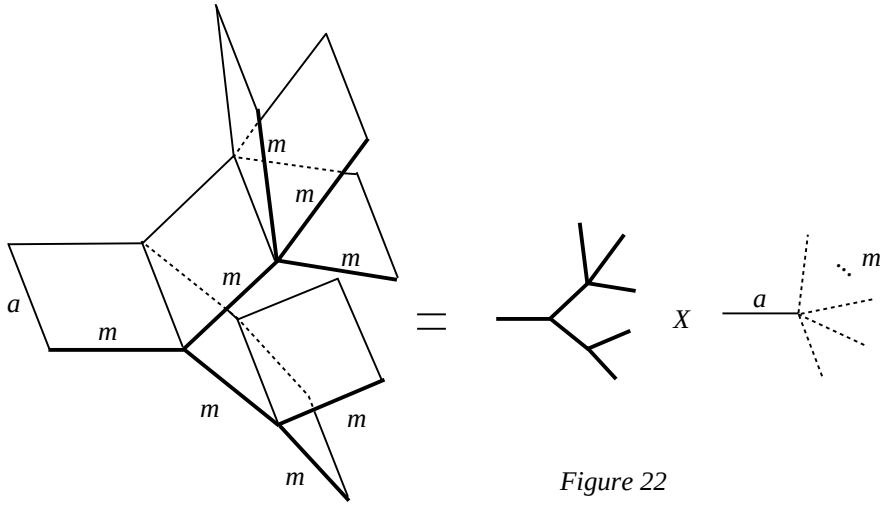


Figure 22

L'étude des links carrés nous informe que la valence des arêtes de l'arbre en gras (notée m sur le dessin) est bien constante. Cela nous suffit pour conclure. Plaçons nous dans le cas de faces triangulaires. Considérons en deux distinctes. Il y a une géodésique qui les visite toutes les deux et d'après le théorème 1.2, cette géodésique est contenue dans un plat qui se trouve pavé par des faces du polyèdre. Les deux faces considérées étaient donc isométriques et par suite, toutes les faces sont isométriques.

Dans l'énoncé, on précise que les sommets et arêtes sont singuliers, c'est un corollaire de la notion de face. Pour finir, il nous faut vérifier que le revêtement universel est bien un immeuble euclidien. Bien sûr, la famille d'appartements sera formée par tous les plats. Vérifions les trois axiomes des immeubles (voir [Bro]).

1. Les appartements sont des systèmes de Coxeter, on vient de le voir.

2. Par deux faces (i.e. chambres) quelconques passe une géodésique, elle-même contenue dans un plat (rang 2 global). Deux chambres sont donc bien contenues dans un même appartement.

3. Comme un plat est convexe, l'intersection de deux plats l'est aussi. Donc, il existe toujours un isomorphisme de complexes qui envoie un plat sur un autre en fixant l'intersection, point par point.

Ici se termine la démonstration du théorème.□

Nous pouvons donner une généralisation de ce dernier théorème dans le cas où on ne suppose plus les polyèdres finis. Dans la définition de polyèdre de la partie 1.4, remplaçons l'hypothèse de finitude par :

Les angles des faces du complexe ont des mesures minorées par un réel strictement positif.

Alors, avec cette nouvelle définition, les links de polyèdres de rang deux seront toujours des immeubles sphériques de dimension un (avec un nombre infini d'arêtes éventuellement). C'est-à-dire que la partie 1.3 fonctionne de la même manière avec cette nouvelle hypothèse. Par contre, un différence apparaît au niveau de la proposition 1.4.1 ; il convient de rajouter les deux types de faces suivants :

- les secteurs d'angle π/n avec $n \geq 3$,

- les demi-espaces, les bandes, les secteurs d'angle $\pi/2$ et les demi-bandes.

Les faces de ce dernier type seront appelées *rectangles généralisés*. Il sont représentés sur la figure 23.

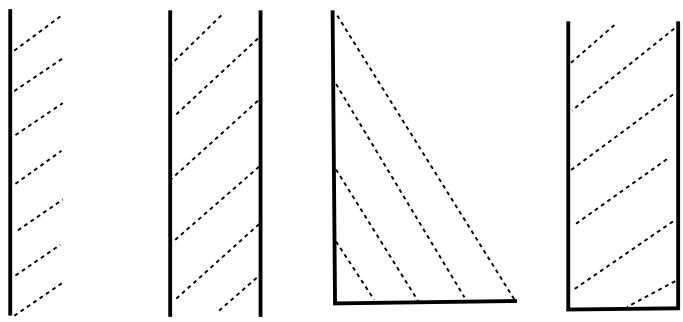


Figure 23 : Faces rectangulaires

Les propositions 1.4.2 et 1.4.3 se modifient légèrement pour s'exprimer dans ce nouveau contexte en une seule :

Proposition 1.4.4 *Les faces d'un polyèdre de rang deux non nécessairement fini sont, ou bien toutes rectangulaires (au sens généralisé), ou bien toutes des secteurs aigus, ou bien toutes des triangles.*

Enfin, le théorème 1.3 se généralise presque sans modification en le suivant :

THÉORÈME 1.4 *Un polyèdre P de rang deux, non nécessairement fini est*
-ou bien le recollement de rectangles généralisés suivant leurs bords ($\widetilde{P}$ est alors le produit de deux arbres) ;
- ou bien le cône sur un immeuble sphérique de dimension un ;
- ou bien le recollement de triangles tous isométriques, suivant leurs bords ($\widetilde{P}$ est alors un immeuble euclidien).

En résumé, autoriser des polyèdres infinis ne fait apparaître qu'un seul nouveau revêtement universel : le cône sur un immeuble sphérique.

Chapitre 2

Les sept polyèdres symétriques

2.1 Introduction

Trois raisons ont motivé cette partie. Dans le chapitre précédent, on étudie les polyèdres de rang deux à courbure ≤ 0, mais il n'est pas donné d'exemple explicite de tels polyèdres qui soient irréductibles. Dans [CMSZ], il est prouvé l'existence de groupes opérant simplement transitivement sur les sommets d'immeubles triangulaires associés à $SL_3(K)$ où $K = \mathbb{F}_q((t))$. Aussi, dans les cas $q = 2$ et $q = 3$, certains de ces quotients sont classifiés. Dans le cas $q = 3$, il n'existe pas de polyèdre à un seul sommet pour de simples raisons combinatoires. Par contre, il y en a dans le cas $q = 2$. Notre première motivation était donc de trouver, sans l'aide de l'ordinateur, tous les polyèdres parmi les plus simples. Cinq d'entre eux étaient déjà découverts dans [CMSZ] (il s'agit des polyèdres orientables), nous en trouverons deux autres. On en donnera une description très précise ; il s'agit de polyèdres à un seul sommet et sept faces, et donc le link est celui associé au plan projectif sur le corps fini à deux éléments.

La seconde raison est double. D'une part, on aimerait comprendre pourquoi deux immeubles peuvent avoir les mêmes links sans pour autant être isométriques. J. Tits démontre cela, mais toujours en ayant comme outils de base les groupes algébriques. On voudrait voir explicitement deux polyèdres n'ayant pas le même revêtement universel tout en ayant les mêmes links. On les trouvera parmi les 7 polyèdres en question : il suffit pour cela de regarder les links d'ordre deux. D'autre part, on aimerait aussi comprendre en quoi les immeubles associés à des groupes algébriques diffèrent des autres. Dans [CMSZ], il est prouvé que les cinq polyèdres orientables sont classiques. Nous ne savons pas pour l'instant si les deux polyèdres non orientables sont ou non classiques. Cette question a engendré le chapitre suivant qui développe certains outils qui permettent de reconnaître le caractère classique.

La troisième était de vérifier sur des polyèdres P irréductibles explicites le fait que $H_1(P, \mathbb{Z})$ soit fini. Dans [Z], A. Żuk démontre bien plus que cela, puisqu'il prouve que les groupes fondamentaux de ces polyèdres ont la propriété (T) de Kazhdan. On voudrait aussi se faire une idée sur les torsions qui peuvent apparaître. Les calculs sur les 7 polyèdres nous surprendront un peu.

Nous commençons par des rappels sur les liens entre plans projectifs et immeubles sphériques hexagonaux. Il fallait avoir précisé les choses sur ce sujet. Arrive ensuite la recherche des 7 exemples suivie de leur présentation sous une jolie forme, qui se prêtera bien au calcul des groupes d'isométries. Pour chacun, on calculera les groupes fondamentaux

(une présentation) leur abélianisé ainsi que leur link d'ordre 2. Les détails de ces deux calculs sont à consulter en annexe. Nous tenons à préciser que notre méthode pour la recherche systématique n'est pas particulièrement élégante. Elle repose sur de nombreuses figures numérotées spécialement de 100 à 307 (le premier chiffre désignant le cas dans lequel elles se trouvent).

2.2 Immeubles sphériques hexagonaux et plans projectifs

Nous allons ici rappeler certains éléments sur les liens entre immeubles hexagonaux et plans projectifs. Il s'agit en fait de préciser les idées.

Définition 2.2.1 *Un immeuble hexagonal est un immeuble sphérique épais dont les appartements sont composés de six chambres.*

Dans la terminologie de Ronan et Tits, ces immeubles s'appellent triangles généralisés épais. Rappelons qu'un immeuble est dit épais s'il n'a pas de sommet appartenant à seulement deux chambres. Le plus connu d'entre eux, et le plus simple, est le graphe d'incidence du plan projectif sur le corps fini à deux éléments (figure 1).

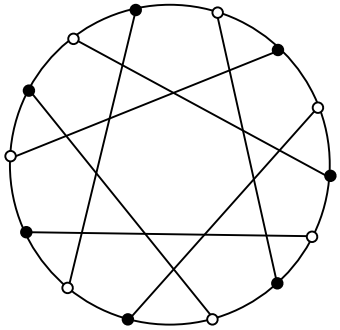


Figure 1

Fait 2.2.1 *À un immeuble hexagonal correspond un plan projectif.*

Pour vérifier ce fait, il suffit de savoir que dans un immeuble, il y a deux types de sommets. Appelons droites les sommets d'un type et points les sommets de l'autre. Vérifions que nous avons bien, par les relations d'incidence de l'immeuble, défini un plan projectif.

1. Deux droites se coupent en un point. En effet, deux sommets de même type se trouvent dans un même appartement et ont donc un point commun (voir la figure 2).

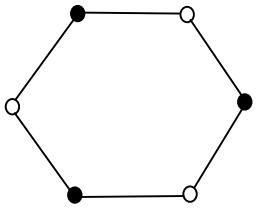


Figure 2

2. Par deux points passe une et une seule droite. Pour l'existence de la droite qui passe par deux points, on procède comme précédemment, pour l'unicité, cela provient du fait que si deux droites se coupaient en deux points, cela constituerait un cycle de longueur quatre dans notre immeuble hexagonal.

Fait 2.2.2 *Le graphe d'incidence d'un plan projectif est un immeuble ; hexagonal s'il est épais.*

Vérifions les axiomes des immeubles. Appelons appartement la donnée de trois droites non concourantes.

1. Deux arêtes se trouvent dans un même appartement. En effet, dans un plan projectif, si on se donne deux droites et un point sur chacune d'elles, il en existe une troisième (celle dessinée en pointillés sur la figure 3), qui vient compléter l'appartement (trois cas peuvent se produire).

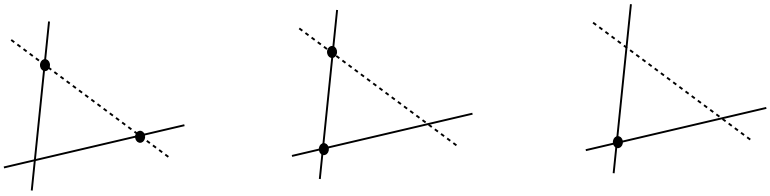


Figure 3

2. Il n'y a pas de cycles de longueur < 6. En effet, les cycles sont de longueur paire et il n'y en a pas le longueur 2 (pas d'arête double) ni de longueur 4 (sinon deux points seraient reliés par deux droites distinctes).

Attention. L'immeuble correspondant à un plan projectif n'est pas toujours épais. Considérons par exemple le plan projectif formé de 4 points sur une droite et d'un cinquième que l'on relie aux quatre autres par quatre droites distinctes. L'immeuble obtenu est trivial (voir figure 4).

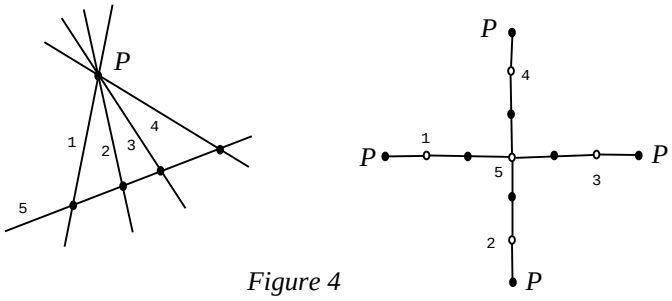


Figure 4

2.3 Comment rechercher les exemples les plus simples

Les immeubles euclidiens qui semblent les plus simples sont ceux de type $\widetilde{A}_2$; c'est-à-dire ceux dont les chambres sont des triangles équilatéraux ; on les appelle les *immeubles triangulaires*. Nous nous proposons ici de rechercher tous les polyèdres à un seul sommet de revêtement universel un immeuble triangulaire (pas nécessairement classique).

Dans un immeuble triangulaire, les murs sont tous incidents à un même nombre de chambres (on a vu dans la première partie qu'il a y deux valences qui s'alternent et que deux sommets à distance π ont même valence). Prenons le nombre minimum, c'est-à-dire 3. Dans le cas classique, on peut penser au groupe $SL_3(\mathbb{Q}_2)$. Un polyèdre à un sommet qui admet pour revêtement universel un tel immeuble a pour link celui associé au plan projectif sur $\mathbb{F}_2$ (figure 1). Ce link possède 21 arêtes. Les polyèdres recherchés auront donc $21/3 = 7$ faces et 7 arêtes qui sont en fait des boucles sur le sommet.

Il s'agit donc de voir comment 7 triangles équilatéraux peuvent se recoller suivant leurs côtés pour réaliser le link voulu en un unique sommet. Nous allons partir du link et tâcher d'assembler les arêtes par trois (les trois angles d'un même triangle). Nous verrons donc les arêtes du polyèdre comme des arêtes supplémentaires au-dessus du link (on les tracera en

pointillé). Ainsi, un triangle correspondra à un hexagone où deux types d'arêtes alternent. (voir figure 5)

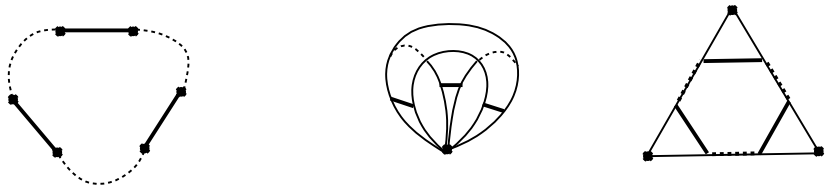


Figure 5

Attention, les arêtes d'un même triangle peuvent se recoller les unes sur les autres. L'hexagone dont il était question plus haut est immergé mais pas toujours plongé. Nous allons donc tracer 7 lignes pointillées reliant deux à deux les 14 sommets du link.

Tout d'abord, regardons quels sont les hexagones possibles. Supposons qu'un trait pointillé relie les extrémités d'une même arête, (on dira qu'il y a une identification à distance un). Nécessairement, l'hexagone qui contient cette arête sera en U. (voir figure 6). Cela correspond au cas où deux arêtes d'un même triangle sont collées l'une sur l'autre.

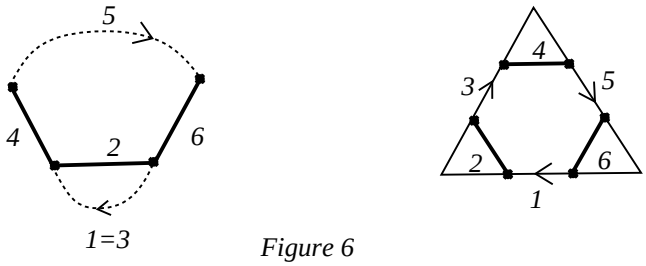


Figure 6

On dira qu'un polyèdre est orientable s'il existe une orientation des arêtes qui soit cohérente sur chacune des faces. Notons qu'il suffit d'orienter une arête pour que toutes le soient. Ainsi, un polyèdre est orientable si et seulement si toutes les identifications se font à distance impaire (1 ou 3). Nous pouvons maintenant décrire notre stratégie de classification. Nous distinguons deux grands cas suivant qu'il existe ou non une identification à distance un. Avant de se lancer dans l'étude systématique, rappelons quelques petits lemmes pratiques :

Une identification à distance 1 donne lieu à un hexagone en U.

Si deux arêtes d'un hexagone se touchent, on a alors une identification à distance 1, et il s'agit donc d'un U.

Dans le link, il y a deux types de sommets qui alternent. Ainsi, s'il y a une identification à distance 2, il y en aura une seconde entre sommets de l'autre type.

2.4 Classification

Nous allons procéder en trois étapes. Nous rappelons ici que les détails de ce paragraphe ne présentent pas beaucoup d'intérêt. On peut se contenter de la trame pour voir où apparaissent les divers exemples et pour comprendre leur dénomination.

2.4.1 Au moins une identification à distance un

Parmi les exemples que nous allons trouver ici, certains seront orientables, ceux notés avec la lettre A, avec en indice le nombre d'identifications à distance 1 ; d'autres ne le

seront pas et seront notés avec le lettre B avec en indice le nombre d'identifications à distance 2. Au total, on trouvera 5 exemples : A_1, A_3, $A_3{}'$, B_2 et B_4.

Notons a l'hexagone qui contient l'arête enjambée (par l'identification à distance un). Aussi, notons b l'autre hexagone qui utilise l'arête double de a (l'identification à distance un). Grâce aux symétries, nous n'avons que 4 cas à étudier : le sommet O est relié à l'un des quatre sommets 1, 2, 3 ou 4. Les sommets notés avec un prime sont équivalents et le sommet sans nom ne peut pas convenir car b serait un carré (voir figure 100).

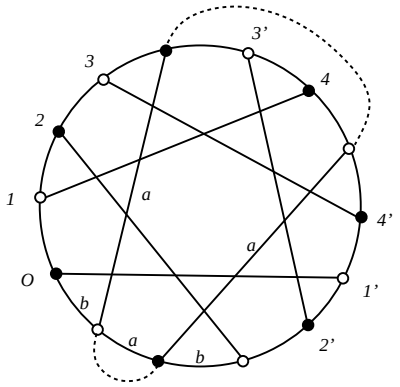


Figure 100

Cas 1

Il y a deux façons de compléter le nouvel hexagone appelé c. Ensuite, on complétera b.

Cas 1.1

Notons d l'hexagone qui comporte l'arête x. Il y a deux façons a priori de le compléter. Or l'une, notée d' conduit à un hexagone en U impossible.

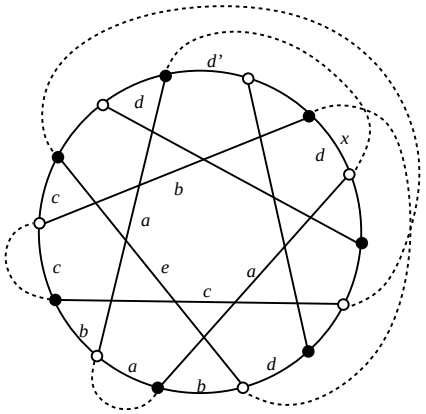


Figure 101

On peut alors compléter entièrement la figure et on s'aperçoit que e forme un carré. D'où l'absurdité (figure 102).

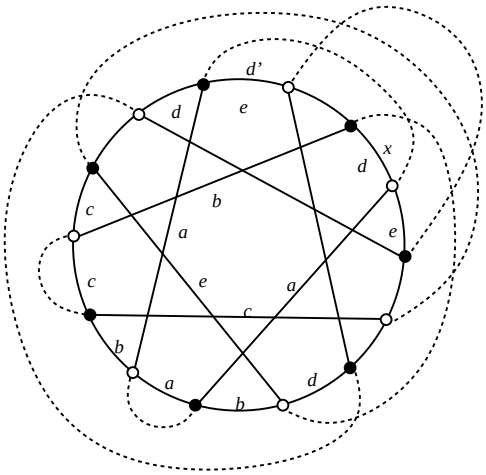


Figure 102

Cas 1.2

L'identification à distance 1 formée par b donne un hexagone en U noté d. On place ensuite l'identification manquante et on complète la figure (figure 103). Pour la dénomination, commencer par g en position centrale. Après quoi e et f sont déterminés. On obtient ainsi l'exemple A_3.

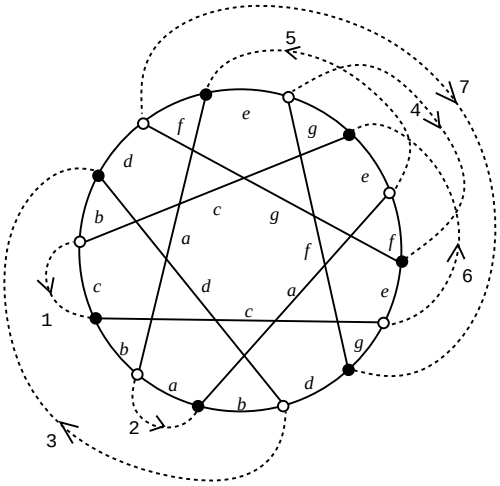


Figure 103 : A_3

Cas 2

Nous avons deux façons de compléter b.

Cas 2.1

Notons c l'hexagone qui contient l'arête x. Une seconde arête est déterminée. Pour la troisième, deux cas se produisent. Dans l'un, c se complète avec la face c', mais alors l'hexagone d donne une impossibilité (figure 104).

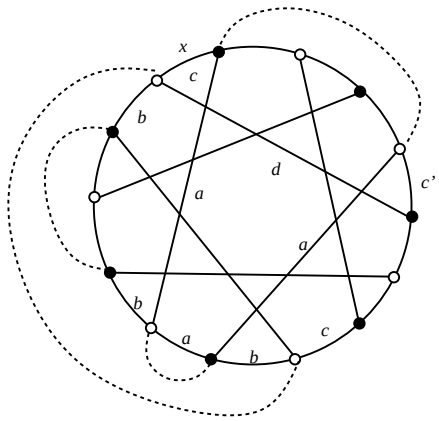


Figure 104

Dans le cas restant, essayons de compléter d. On y arrive en éliminant un cas qui conduit à un U impossible. Puis, on place l'identification restante. Notons alors e l'hexagone contenant x. On peut lui trouver une seconde face, mais pas une troisième (figure 105).

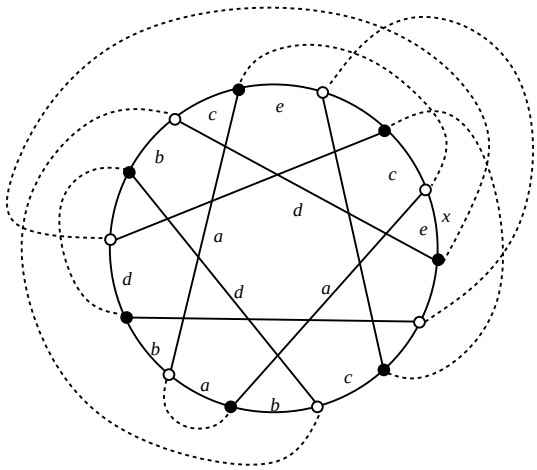


Figure 105

Cas 2.2

Notons c l'hexagone qui contient l'arête x. Il se complète et donne une identification supplémentaire. De même, notons d l'hexagone contenant l'arête y. Il impose une autre identification, après quoi, on peut tracer la dernière et déterminer successivement les hexagones e, f et g. On tombe sur B_2 (figure 106).

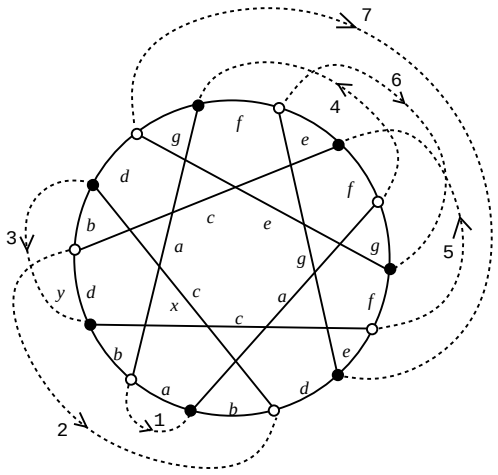


Figure 106 : B_2

Cas 3

On a deux possibilités pour terminer l'hexagone b (voir figure 107).

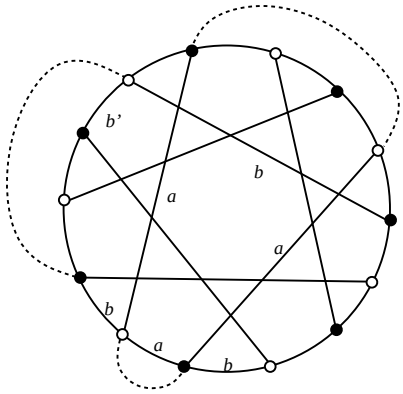


Figure 107

Cas 3.1

On crée un U noté c que l'on termine. Notons d l'hexagone qui contient x. Pour trouver sa troisième liaison, on a dû faire un choix, mais il a été dicté par l'impossibilité d'un nouveau U. Alors la figure se termine (figure 108). Si on regarde les arêtes e, on s'aperçoit qu'elles forment un carré. Ce qui est impossible.

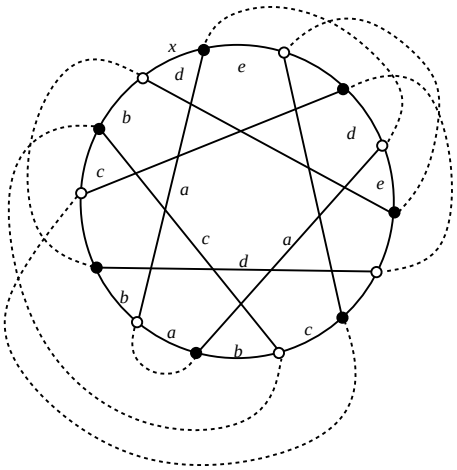


Figure 108

Cas 3.2

Notons c l'hexagone qui contient l'arête x. On détermine une autre arête de c, puis, deux cas se produisent pour terminer cet hexagone.

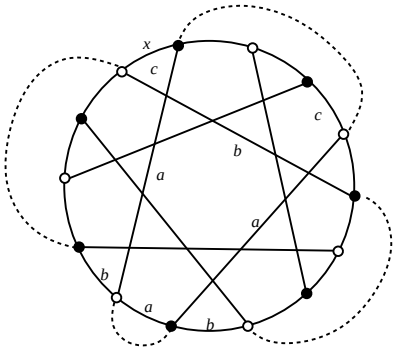


Figure 109

Cas 3.2.1

Un U se forme. On le note d. Après avoir terminé ce U, la dernière relation est encore un U, noté e. On note alors successivement f et g. On finit par obtenir $A_3{}'$ (figure 110). On le distingue facilement de A_3 puisque ses trois identifications à distance un ne sont pas contenues dans un même appartement alors que celles de A_3 le sont.

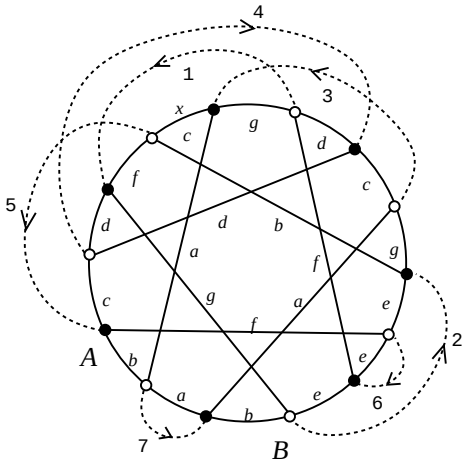


Figure 110 : A'_3

Cas 3.2.2

Notons d l'hexagone qui contient l'arête y. Pour le terminer, nous avons deux possibilités ; mais celle qui consiste à créer un U, redonne l'exemple A_3'. Ainsi, nous terminons d, puis toutes les identifications. Notons e l'appartement contenant l'arête z. Puis f celui qui contient t. On obtient ainsi l'exemple A_1 (figure 111).

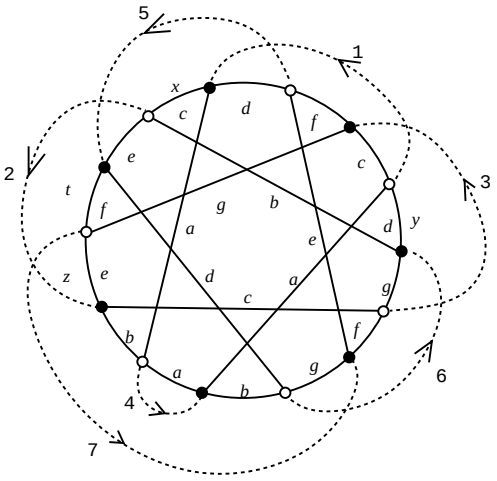


Figure 111 : A_1

Cas 4

Il y a deux possibilités pour terminer l'hexagone b.

Cas 4.1

Soit c l'hexagone qui contient l'arête x. Une autre arête est nécessairement déterminée. Pour terminer c, on élimine le cas où un U impossible se formerait. Mais c'est alors pour terminer l'hexagone d partant de y qu'il y a un problème (voir figure 112).

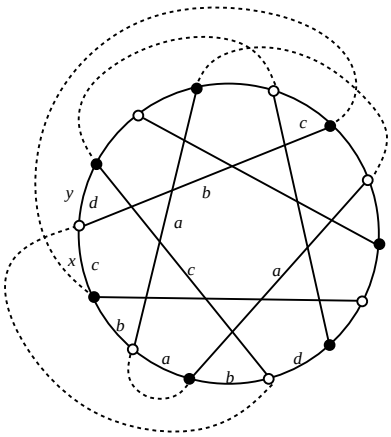


Figure 112

Cas 4.2

Soit c l'hexagone qui contient l'arête x. On détermine une autre arête de c. Ensuite, deux cas se produisent pour compléter c.

Cas 4.2.1

Notons d l'hexagone qui contient l'arête y. On peut déduire la troisième identification de d en pensant que celle qui restera ne pourra se faire à distance un pour causes de U impossibles. Ainsi toutes les liaisons se forment. Mais alors, une impossibilité apparaît quand on veut former l'hexagone e partant de z (voir figure 113).

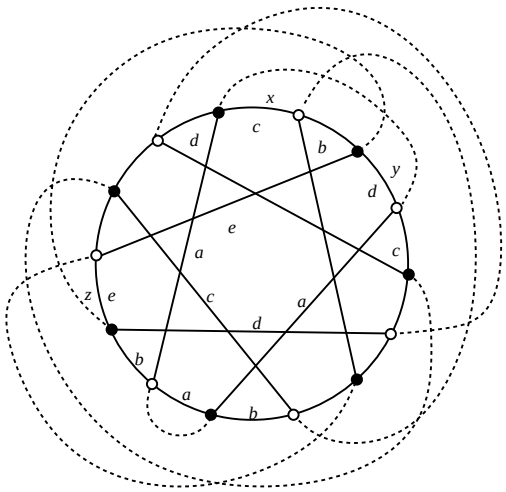


Figure 113

Cas 4.2.2

Si on regarde l'identification qui par du point A isolé, on voit qu'il doit être relié au point B sinon la dernière identification serait un U impossible. Une fois qu'on a placé toutes les identifications, il ne reste plus qu'à donner des noms. Dans l'ordre, regardons d partant de x, puis e partant de y et enfin f partant de z. l'hexagone restant est noté g (voir figure 114). On trouve B_4.

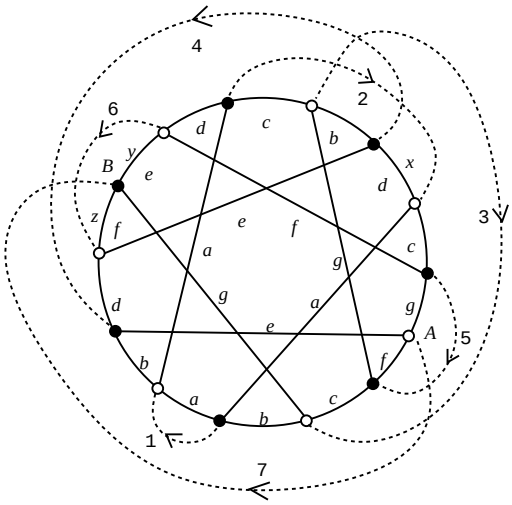


Figure 114 : B_4

2.4.2 Uniquement des identifications à distance 3

Là encore nous distinguerons plusieurs cas.

Il y a trois identifications dans un même appartement

On trouvera un seul exemple dans ce cas : C_2. L'hexagone a contenant la face x peut soit être totalement contenu dans l'appartement en question, soit n'avoir que la face x en commun avec cet appartement.

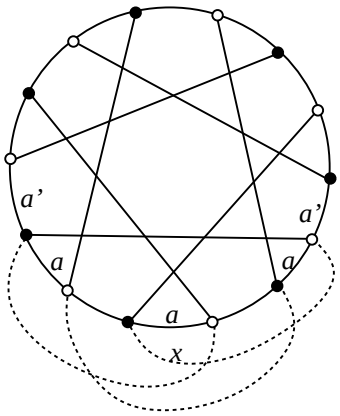


Figure 201

Plaçons nous dans ce dernier cas. Alors, l'hexagone b qui contient la face y serait lui entièrement contenu dans l'appartement initial (voir figure 202)

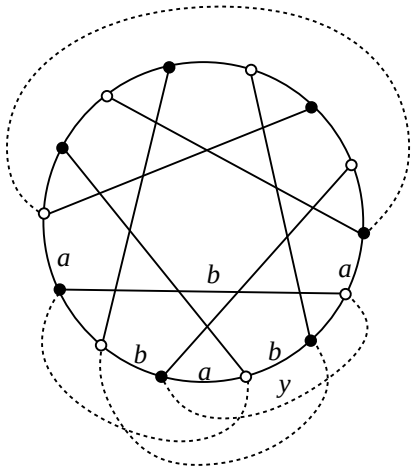


Figure 202

On revient donc au premier cas. Il y a deux façons de compléter l'hexagone b contenant y ; pour obtenir b ou b' (voir figure 203).

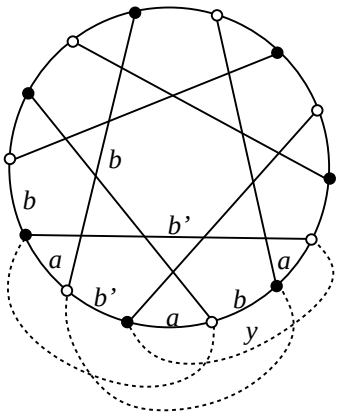


Figure 203

Dans le cas où l'appartement est composé de deux hexagones, on peut, par symétrie, compléter l'hexagone c qui contient z. Mais alors, parmi les deux identifications qui restent, une sera à distance un (voir figure 204).

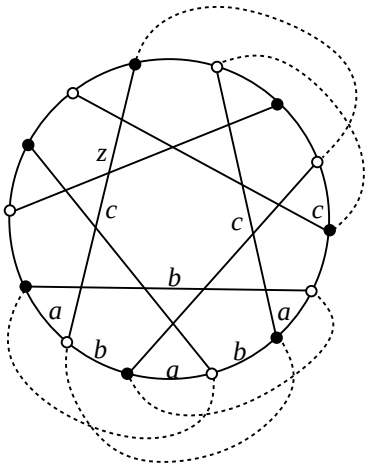


Figure 204

Dans l'autre cas, l'hexagone b se complète hors de l'appartement. Soit maintenant c l'hexagone qui contient la face z. On peut le compléter. Puis, les deux dernières identifications s'imposent (voir figure 205).

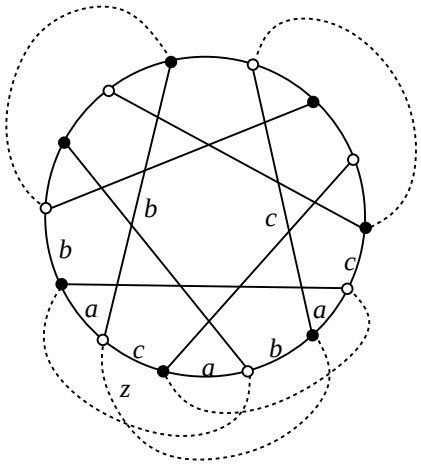


Figure 205

Il ne reste alors plus qu'à numéroter les hexagones. Soit e qui contient t. On peut le trouver entièrement en pensant qu'il n'y a pas de carré. Par symétrie, il en va de même pour f puis g se précise (voir figure 206). On obtient ainsi C_2.

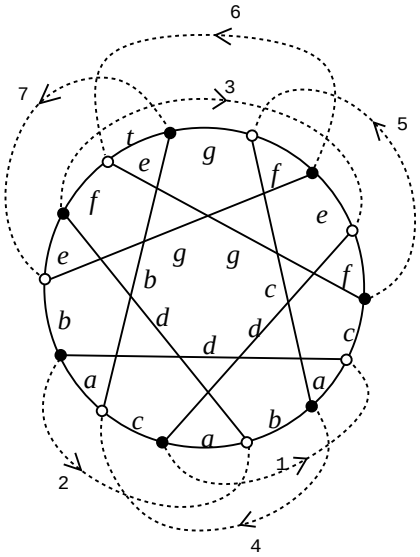


Figure 206 : C_2

Il n'y a pas deux identifications dans un même appartement

On trouvera ici l'exemple le plus régulier et seulement celui-là : C_1. Partons de l'identification notée 1 sur la figure 207.

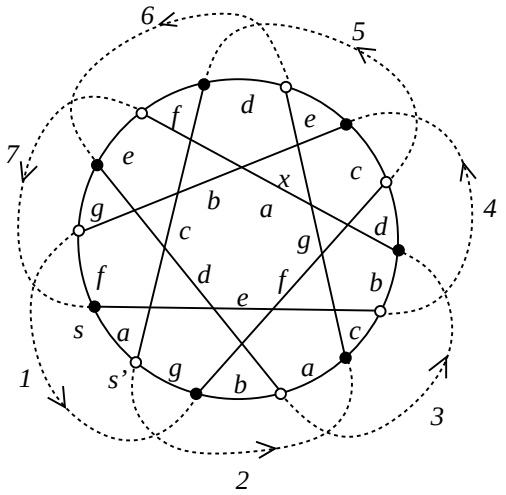


Figure 207 : C_1

L'identification partant de s est déterminée à symétrie près. Ensuite, regardons celle partant de s'. Elle est déterminée par le fait de ne pas appartenir à un même appartement qu'une des autres. Ainsi, toutes les identifications s'imposent. Pour la dénomination des hexagones, partons de a contenant x. Deux choix symétriques nous sont offerts. Décidons de tourner à gauche. Alors la dénomination de tous les autres hexagones sera imposée. Ainsi, nous obtenons C_1.

Le cas restant

On verra qu'il n'y a pas d'exemple dans ce cas.

Nous avons donc deux liens dans un même appartement, mais pas trois.

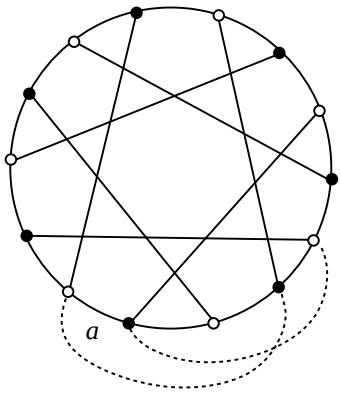


Figure 208

Complétons l'hexagone a noté figure 208. Trois cas se présentent, ils sont représentés sur la figure 209.

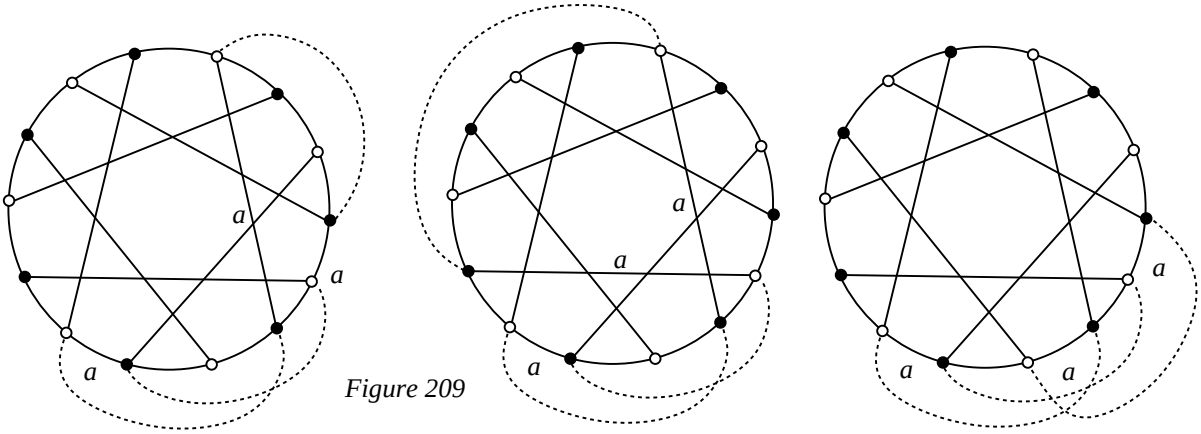


Figure 209

Reprenons chacune de ces trois figures pour tâcher de les compléter.

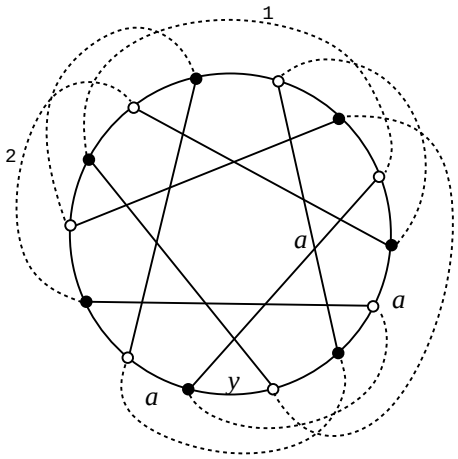


Figure 210

Sur la figure 210, le lien 1 partant du sommet noir est imposé. De même pour le lien 2 partant encore du sommet noir (n'oublions pas qu'il ne faut pas trois identifications dans un même appartement). On place ensuite les deux autres liens. On constate alors que l'hexagone contenant la face y ne peut être complété.

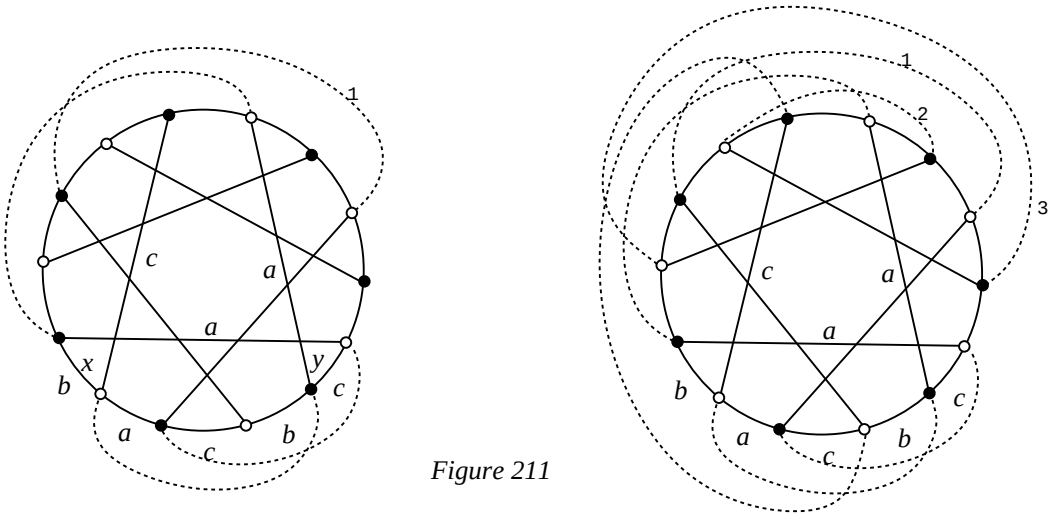


Figure 211

Prenons le second cas. Là encore, le lien 1 partant du sommet noir est forcé. Notons

b l'hexagone contenant la face x. On lui détermine une autre face. Ensuite, notons c l'hexagone contenant y. Il détermine un nouveau lien. Pour plus de clarté, passons au dessin de gauche (figure 211). Les deux liens restants s'imposent. Mais on constate alors que les liens 1, 2 et 3 se trouvent dans un même appartement (un nœud papillon).

Passons au dernier cas. Suivre sur la figure 212.

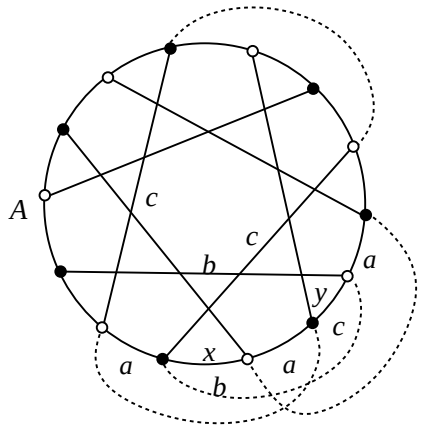


Figure 212

Notons b l'hexagone qui contient l'arête x. Une seconde arête s'impose. Notons alors c l'hexagone contenant l'arête y. On peut trouver le lien qui manque à c en pensant que les trois liens qui resterons ne devront pas se trouver dans un même appartement. Mais alors, le sommet A ne peut plus être relié á un autre à distance 3.

2.4.3 Une identification à distance deux impose une identification à distance un

Ainsi, nous aurons déjà trouvé tous les exemples dans les deux cas précédents. Supposons donc qu'il n'y ait pas d'identification à distance un et au moins une à distance deux. Commençons par placer une identification à distance 2 (voir figure 301).

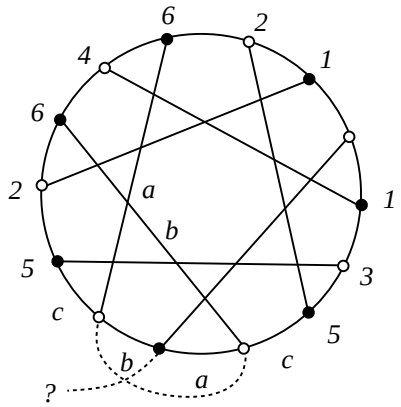


Figure 301

Ensuite, nommons a et b les hexagones contenant les arêtes enjambées. Par symétrie, on peut supposer placée une autre arête de chacun de ces hexagones. Nommons alors c l'hexagone qui contient les deux arêtes restantes aux extrémités de la liaison à distance 2. Nous allons alors distinguer six cas en regardant où peut arriver la liaison qui part du sommet enjambé par la première liaison marquée. Là encore, la symétrie de la figure nous indique qu'il n'y a, a priori, que six cas à distinguer : notés de 1 à 6 sur la figure 301. Le sixième cas s'élimine de suite : a forme un carré.

Dans chacun des cinq cas restants, il s'agit de compléter les trois hexagones déjà commencés.

Cas 1. Dans ce cas, nous voyons qu'il y a deux façons de compléter l'hexagone a. Puis ensuite, une seule pour terminer b (voir figure 302 où ces deux cas sont représentés côte-à-côte).

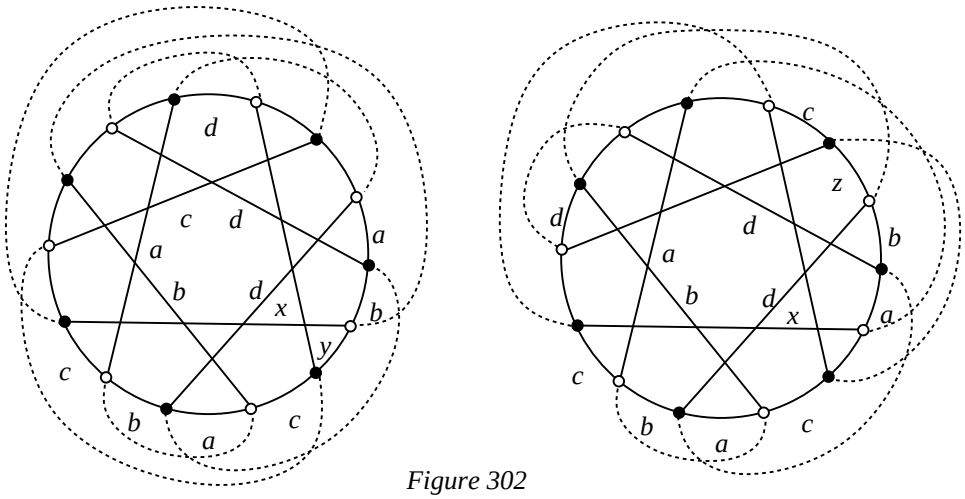


Figure 302

On arrive à compléter l'hexagone d qui contient l'arête x. Ensuite, en regardant l'hexagone c, on peut tracer les deux liens restants. Maintenant, regardons l'hexagone qui contient l'arête y (respectivement l'arête z dans le cas de droite). Il ne peut pas être construit avec nos contraintes.

cas 2. Il y a, a priori, trois façons de compléter l'hexagone a. Mais l'une d'entre elles compléterait l'hexagone b incorrectement. Ici encore, sur la figure 303, les deux cas sont représentés.

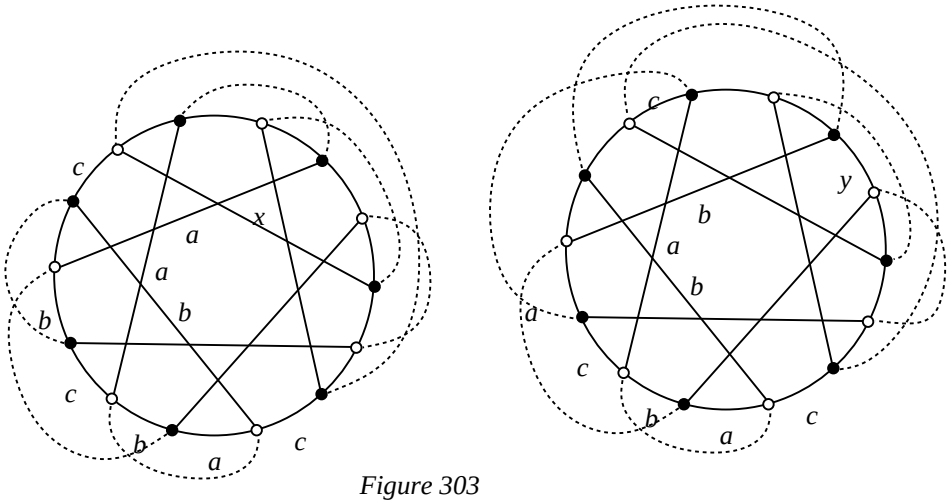


Figure 303

Dans le cas de gauche, b se complète, puis c. Ensuite, les deux derniers liens s'imposent (pour ne pas créer d'identification à distance un). Mais alors, l'hexagone qui contient l'arête x ne peut pas se former.

Dans le cas de droite, l'hexagone c se complète, puis b. Alors les deux dernières identifications s'imposent et on constate que l'hexagone qui contient y ne peut se compléter.

Cas 3. Nous devons distinguer trois cas pour terminer l'hexagone a. Le premier est

représenté sur la figure 304 et les deux autres sur la figure 305.

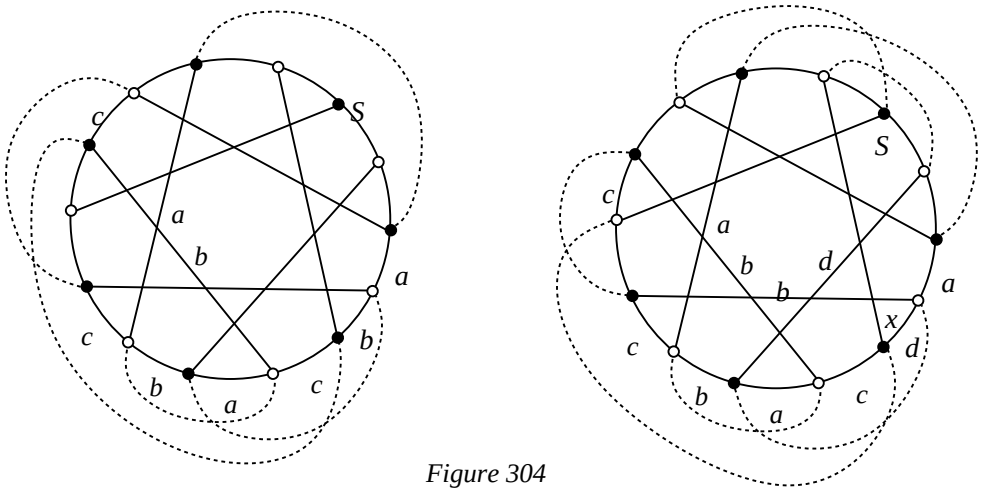


Figure 304

Considérons le premier cas. Terminons l'hexagone b. Il y a deux cas qui se produisent. Le premier est représenté sur la figure de gauche et le second sur celle de droite.

Dans le premier cas, l'hexagone c se termine (un lien s'impose). Mais alors, le sommet S ne peut être relié qu'à distance un.

Dans le second, il y a, a priori, deux façons de relier le sommet S. Mais l'une des façons est incompatible avec l'hexagone c. Ainsi, le sommet S est relié puis on termine l'hexagone c et on note le dernier lien. Or, si on ne peut pas terminer l'hexagone d qui contient l'arête x.

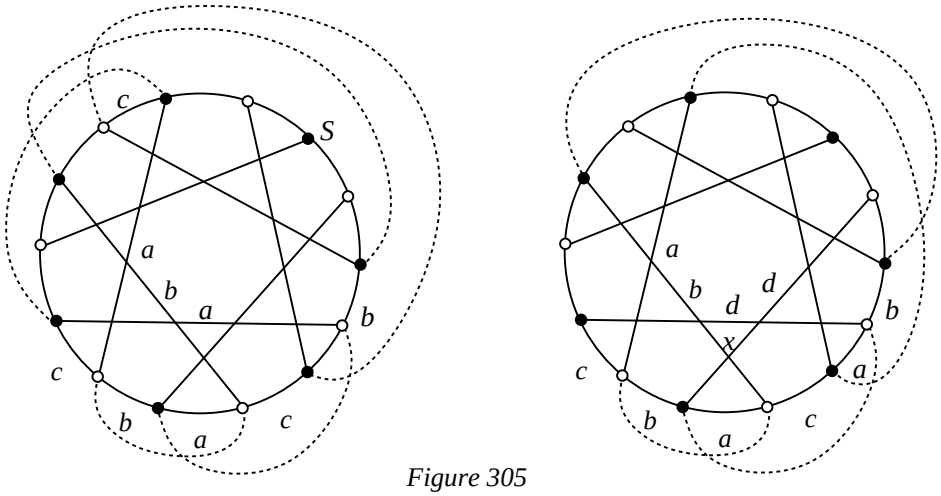


Figure 305

Passons à la figure 305. Sur le dessin de gauche, l'hexagone b se termine, puis c. Mais alors, le sommet S ne peut être relié qu'à distance un. Sur le dessin de droite, en essayant de compléter simultanément b et c, on ne voit qu'une seule possibilité pour terminer b. Soit maintenant d passant par x. Cherchons à le compléter tout en pensant à l'hexagone c. Nous constatons une impossibilité.

Cas 4. En regardant les hexagones x et y simultanément, il apparaît une unique façon de les compléter. Cherchons maintenant à compléter les hexagones c et d (c'est-à-dire, cherchons à placer les arêtes notées c' et d' sur la figure 306). Il apparaît deux cas que nous représentons côte-à-côte.

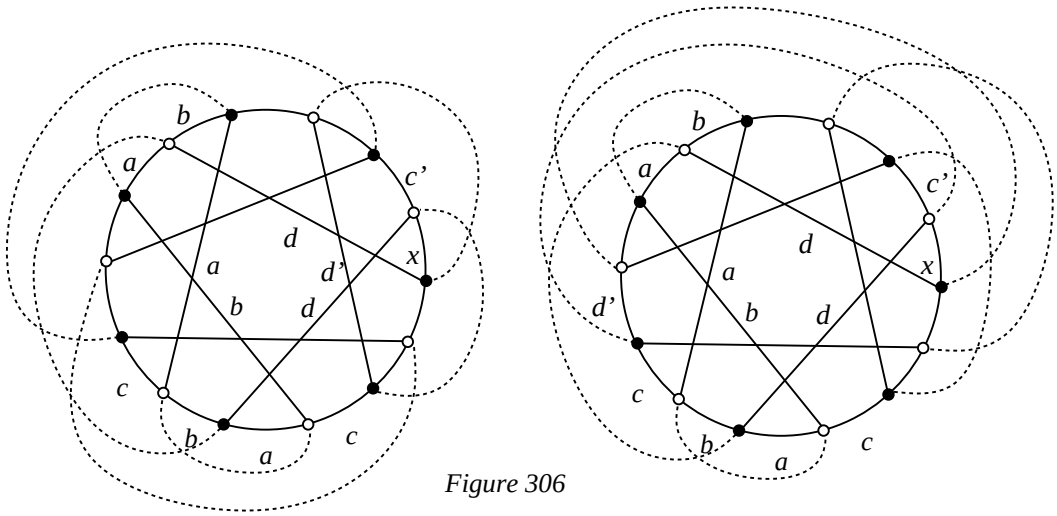


Figure 306

Dans chacun de ces deux cas, aucun hexagone ne peut contenir l'arête notée x.
Cas 5. Ce dernier cas est représenté sur la figure 307.

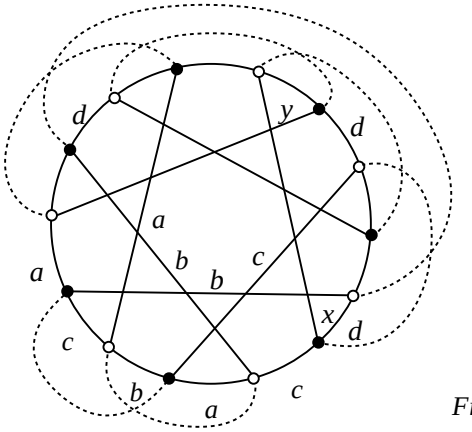


Figure 307

Les hexagones c, b puis a se complètent successivement. alors, regardons l'hexagone d contenant l'arête x. Nous n'avons qu'une façons de le compléter et alors la dernière liaison s'impose. Remarquons alors qu'aucun hexagone ne peut contenir l'arête y.

2.5 Dessins des sept polyèdres symétriques et leur groupe d'isométries

Nous allons donner une description la plus claire et la plus pratique possible des 7 polyèdres trouvés plus haut. Pour chacun, nous aimerions trouver une face qui ait exactement six voisines distinctes. Cela nous permettrait de donner une description simple de nos polyèdres en développant autour de cette face. Malheureusement, cela n'est pas toujours possible. Il faudra, pour quatre des sept polyèdres, développer un peu plus loin. Aussi, on cherchera à rendre visibles les symétries. Nous utiliserons les calculs de l'annexe A qui simplifient le travail. De plus, nous avons été amenés à orienter les arêtes sur les links trouvés plus haut. Les dessins sont tous rassemblés sur la figure 7. Les groupes d'isométries sont rappelés dans un tableau un peu plus loin.

Commençons par le plus symétrique, c'est-à-dire C_1. Notons G son groupe d'isométries. Sur la figure 207, on voit une isométrie d'ordre 7 (la rotation d'angle $2\pi/7$). Elle permute cycliquement les 7 faces. Pour le dessin, choisissons de développer à partir de la face a. Alors, il apparaît une isométrie d'ordre 3 qui permute les arêtes de cette face et qui permute les autres faces comme suit : $(dgf)(bce)$. Remarquons que cette isométrie fixe l'arête 4. Le sous-groupe G^+ des isométries positives, opère donc transitivement sur l'ensemble des arêtes orientées. On a déjà remarqué que le stabilisateur d'une arête contient une isométrie d'ordre 3 qui permute les faces qui contiennent cette arête. Or, une isométrie qui fixe point par point une face est l'identité (cela se voit facilement sur la figure 207). Montrons maintenant qu'il n'y a pas d'isométrie indirecte. Considérons-en une qui renverse l'arête 3 en fixant globalement la face a (se référer à la figure 7). En regardant les faces b et d, on voit que les permutations possibles sur les arêtes sont $(15)(46)$ ou bien $(14)(56)$. Mais cela ne convient pas pour l'échange des arêtes 2 et 7. Finalement, G est l'unique produit semi-direct (qui, soit dit en passant, est le plus petit groupe d'ordre impair non abélien) :

$$G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \propto \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}.$$

Passons maintenant à A'_3. Choisissons de développer autour de la face g. Nous faisons alors apparaître une symétrie d'ordre 3 qui permute les arêtes de la face g et les autres faces $(bfc)(eda)$. Cette isométrie fixe l'arête 5 et permute (647). Sur la figure 110, on constate que les sommets notés A et B, ne jouent pas des rôles symétriques vis-à-vis de l'hexagone a (l'un fait partie d'un U et pas l'autre). Ainsi, il n'y a pas d'isométrie négative qui échangerait l'arête 7 et donc pas d'isométrie négative du tout. De plus, une isométrie qui fixe a, fixe aussi b et donc e et d. Puis il devient clair que c'est l'identité. Finalement, le groupe d'isométries de A'_3 est $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Les groupes des autres polyèdres auront exactement deux éléments. Considérons A_1. Sur la figure 111, il apparaît une symétrie : la réflexion par rapport au diamètre qui fixe globalement l'unique U. Cette symétrie permute les faces $(cd)(eg)$. Il n'y en a pas d'autre, car si a est fixé alors b l'est aussi, ainsi que les arêtes 3 et 5 (et finalement tout est fixé). Le groupe d'isométries de A_1 est donc $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Passons à C_2. Sur la figure 206, il apparaît une isométrie qui renverse l'orientation : la réflexion par rapport au diamètre reliant les secteurs a et g du bord. Cette symétrie fixe globalement a, d, g et permute $(ef)(bc)$. L'appartement contenant la face a est privilégié. Considérons une isométrie qui fixe a point par point. Les faces b, c et d sont alors aussi fixées. Puis, tout est fixé. Développons maintenant autour de la face a. La figure que nous donnons fait apparaître une symétrie d'ordre 3 qui permute les arêtes de la face a (une rotation d'angle $2\pi/3$). Finalement, le groupe des isométries de C_2 est le groupe du triangle $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \propto \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Considérons maintenant le dernier polyèdre orientable : A_3. Sur la figure 103, il apparaît encore une réflexion qui fixe globalement les faces b, e, d et qui permute $(ac)(fg)$. L'appartement qui contient b est privilégié. Nous allons développer ce polyèdre autour de cette face pour faire apparaître une symétrie d'ordre trois. Finalement, on voit que les symétries de la face b proviennent toutes de symétrie du polyèdre. Supposons maintenant que b soit fixé par une isométrie. Alors cette isométrie fixe aussi c et d. Il est alors clair que c'est l'identité. Finalement, le groupe d'isométries de A_3 est donc le groupe du triangle $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \propto \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Passons maintenant aux polyèdres non orientables. Pour B_4, sur la figure 114, il apparaît une symétrie : la réflexion qui fixe globalement l'unique U appelé a. Cette symétrie

fixe aussi f et b, et permute $(eg)(cd)$. Considérons une isométrie qui fixe a. Elle fixe aussi b, donc aussi c et d (regarder la figure 114). Puis on voit que tout est fixe. Ainsi, le groupe d'isométries de B_4 est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Il ne nous reste plus que B_2. Notons que l'identification à distance un et les deux identifications à distance 2 se trouvent dans un même appartement. Supposons que cet appartement soit fixé par une isométrie alors il est clair (voir la figure 106) que c'est l'identité. Il existe effectivement une isométrie d'ordre 2 qui fixe a, b, e et qui permute $(cd)(fg)$. Pour la voir, nous faisons une figure spatiale (106').

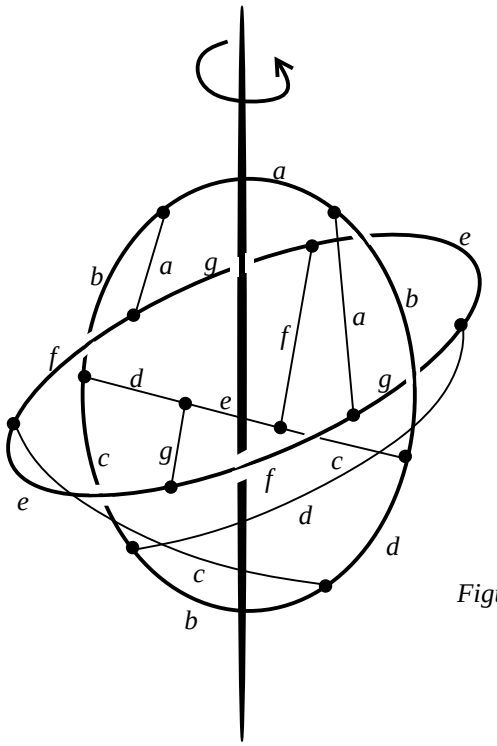
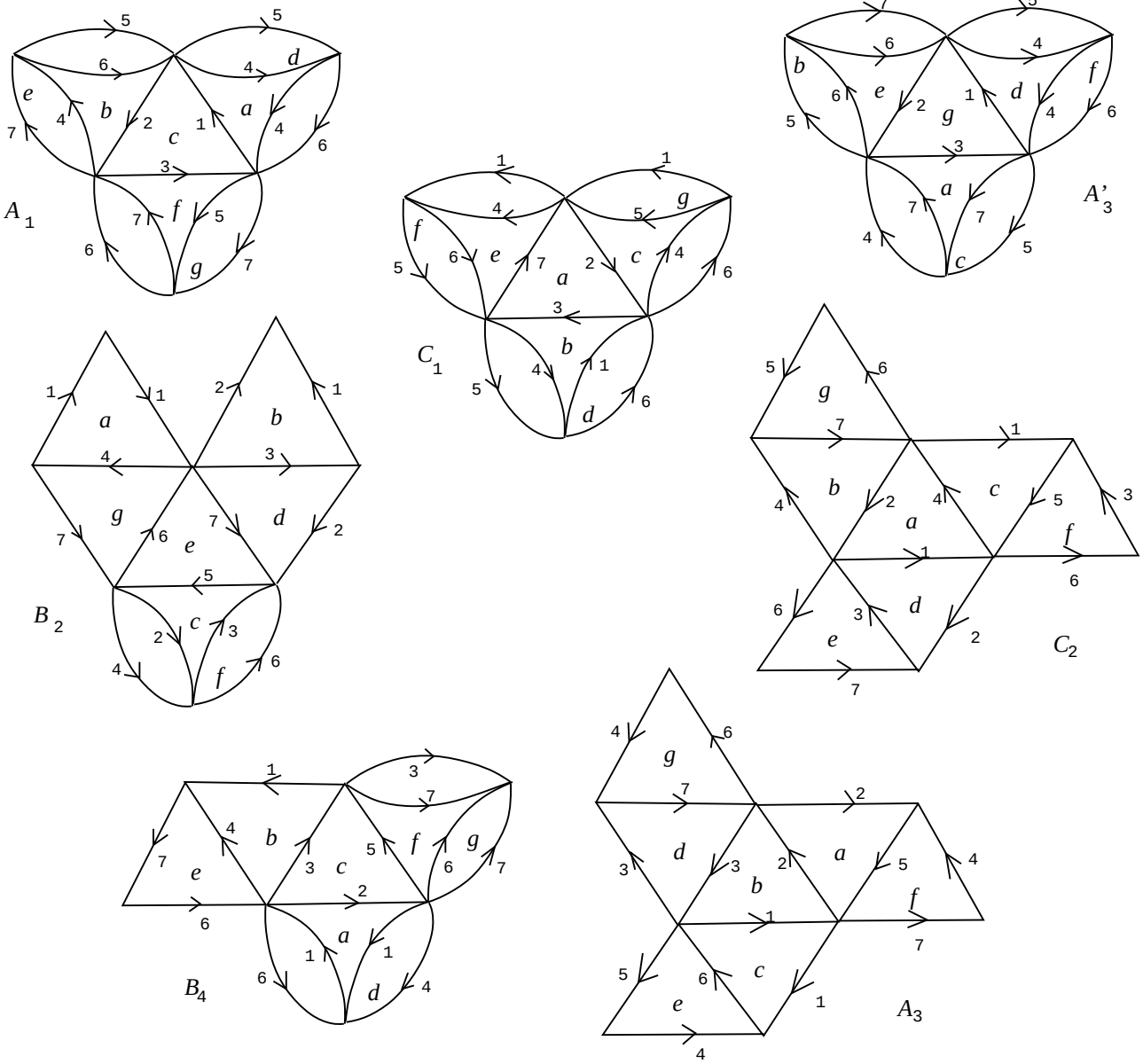


Figure 106' : B_2

Figure 7



Sur chacun des 7 dessins, il faut voir 7 triangles équilatéraux qu'il s'agit de recoller suivant leurs côtés en suivant la numérotation des arêtes. On a dessiné certains triangles en traits courbes afin d'éviter les croisements d'arêtes. Il est plus commode de penser ces dessins en trois dimensions : les triangles pincés seront vus au-dessus des triangles gonflés. Il ne faut pas oublier que chaque arête est incidente à exactement trois faces.

2.6 Calculs sur ces sept polyèdres symétriques

Les détails des calculs nécessaires dans cette partie sont portés en annexe. Les résultats sont rassemblés dans le tableau du paragraphe suivant.

2.6.1 Les groupes fondamentaux et leurs abélianisés

Il est facile de trouver une présentation des groupes fondamentaux de ces 7 polyèdres à l'aide des dessins. Dans le cas du dessin le plus ramassé, 4 générateurs et autant de relations suffisent. Pour les autres, il en faudra un peu plus. Ensuite, on pourra simplifier la présentation en ne donnant que deux générateurs et deux relations sauf pour le cas de C_1 qui nécessite trois générateurs et autant de relations. On rappelle ici que nous savons (voir [Z]) que ces groupes ont la propriété (T) et que donc leur $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ est fini. Le calcul de l'abélianisé se fait alors aisément sur ces présentations. Les polyèdres A_1 et A_3 ont les mêmes abélianisés. Les autres sont deux à deux distincts. Notons aussi que les torsions qui apparaissent sont 2 et 3 excepté dans le cas de $A_3{}'$ qui révèle la torsion 7. Aussi, la torsion 3 est présente chez les polyèdres orientables, et pas chez les deux autres.

2.6.2 Les links d'ordre 2

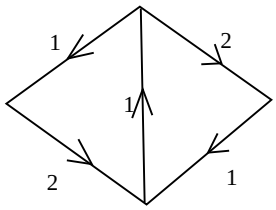
Se référer à la partie sur la tour des links du chapitre suivant pour la définition du link d'ordre 2. Il est facile de développer les revêtements universels de nos polyèdres autour de chacunes des faces. Ce qui est fait dans l'annexe A. Après quoi il ne reste plus qu'à noter sur le dessin d'un link d'ordre 2 les résultats obtenus. C'est ainsi que nous obtenons les links d'ordre 2 de chacun de nos 7 polyèdres. Les deux types de link apparaissent : A_1, A_3, C_2 et B_2 sont de l'un, et C_1, B_4 et A'_3 sont de l'autre. Parmi les revêtements universels de ces 7 polyèdres, nous en avons donc au moins deux distincts.

2.6.3 Les $H_2(P, \mathbb{Z})$ et les plats périodiques dans $\widetilde{P}$

Il est facile de calculer les H_2 à coefficients entiers des sept polyèdres. L'espace des 2-cycles est donné par le noyau d'une matrice 7×7 à cœfficients $0, \pm 1, \pm 2$ (il y a 7 faces et 7 arêtes). Dans chacun des sept cas, on trouve que ce noyau est trivial. On retrouvera ce fait à la fin de ce paragraphe.

Pourtant, nous verrons au paragraphe 2.8 qu'il y a autant de plats périodiques dans $\widetilde{P}$ que de géodésiques périodiques non singulières, en bas, dans P. Il y a donc beaucoup de tores immergés dans P. Ce que dit le calcul, c'est qu'un tel tore recouvre les faces de P un nombre pair de fois, autant de fois dans une orientation que dans l'autre. Nous avons illustré ce fait en développant l'unique plat périodique contenant une géodésique périodique non singulière, dans le cas de C_1. Ce plat recouvre 8 fois les faces d, e, g et 6 fois les faces a, b, c et f (voir figure 9). Bien sûr, on peut trouver des tores plus simplement : en particulier, dans le cas où il existe une identification à distance un comme le montre la figure 8. Attention, sur cette figure, le lacet numéroté 1 n'est pas une géodésique périodique.

Figure 8



Calculons la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un polyèdre à f faces, s sommets et a arêtes de même link que nos polyèdres. En comptant les sommets, on trouve : $2a = 14s$ et en comptant les arêtes : $3f = 3a$. D'où, $f = a = 7s$ et donc, $\chi = s - a + f = s = 1 - b_1 + b_2$.

Puisqu'on sait que $b_1 = 0$, il vient donc

$$b_2 = s - 1.$$

Dans nos exemples, le second nombre de Betti est donc nul ($s = 1$).

2.7 Tableau récapitulatif

Pour chacun des sept polyèdres, on note les nombres n_i d'identifications à distance i ; $Isom(P)$ le groupe d'isométries ; s'il y a ou non des isométries qui renversent l'orientation (pour les cinq orientables) ; une présentation du π_1 avec trois générateurs a, b, c pour C_1 et seulement deux (a et b) pour les autres ; l'abélianisé ; et enfin, le type de revêtement universel. Cette dernière donnée sera expliquée et calculée dans le chapitre suivant ; il s'agit du type de link d'ordre 2 du sommet. Nous donnons aussi la correspondance pour les cinq polyèdres orientables entre nos notations et celles de [CMSZ]. Nos points de vue étant différents, nous avons été amenés à des notations différentes. Les groupes d'isométries permettent de s'y retrouver, excepté pour A_3 et C_2 que l'on distingue par leur H_1. Enfin, nous avons mis une croix X dans les cases ne correspondant à rien.

P	$cmsz$	n_1, n_2, n_3	$Isom(P)$	$Isom^-$	$\pi_1(P)$	$H_1(P, \mathbb{Z})$	$\widetilde{P}$
A_1	C_1	$1, 0, 6$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	*oui*	$b^{-1}a^2b^{-2} = a^{-5}ba^{-3}$ $a^{-4}ba^{-1} = bab^{-1}a^2b^{-1}$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	0
A_3	B_2	$3, 0, 4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \propto \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	*oui*	$b^{-1}a^{-1}b^2 = ab^3a^2$ $a^3ba = b^{-2}a^2b^{-1}$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	0
A_3'	A_2	$3, 0, 4$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	*non*	$b^2 = a^{-1}ba^{-4}$ $b^3a^{-2}b^4 = a^2b^{-1}a^{-2}$	$\mathbb{Z}/42\mathbb{Z}$	1
C_1	A_1	$0, 0, 7$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \propto \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$	*non*	$bc^{-1}b = a^{-1}ca$ $b^{-1}ab = ca^{-1}c$ $a^2b^2c^2 = 1$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	1
C_2	B_1	$0, 0, 7$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \propto \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	*oui*	$ba^2b^2 = a^2b^2a$ $baba = ab^{-1}a^{-2}bab$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	0
B_2	X	$1, 2, 4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	X	$b^{-1}ab^{-1} = a^2b^2a^{-3}$ $a^2b^2a^2 = b^2ab^2$	$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$	0
B_4	X	$1, 4, 2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	X	$bab^{-2} = a^4ba^2$ $ba^3b^2 = a^{-1}b^{-1}a^2$	$\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$	1

A priori, on ne sait pas si les groupes $\pi_1(A_1)$ et $\pi_1(A_3)$ sont ou non isomorphes.

2.8 Plats périodiques

Nous allons maintenant démontrer une proposition déjà remarquée plus haut. Les polyèdres dont il est question ici, ne sont pas nécessairement triangulaires. Rappelons

qu'une direction sera dite singulière si elle est déterminée par les arêtes du polyèdre.

Proposition 2.8.1 *Toute géodésique périodique d'un polyèdre fini de rang deux, dont la direction n'est pas singulière, se relève dans le revêtement universel en une droite contenue dans un unique plat. De plus, ce plat est périodique.*

DÉMONSTRATION. Voyons pour commencer l'unicité du plat qui contient la droite γ en question. Si deux plats la contiennent, leur intersection est un convexe, réunion de faces, contenant une droite. Il s'agit donc d'une bande. Mais puisque la droite a une direction non singulière, cette bande ne peut pas être limitée en largeur et est donc un plat tout entier.

Voyons maintenant pourquoi l'unique plat qui contient γ est périodique. La première direction périodique est donnée par la géodésique. En effet, l'invariance par tanslation de la géodésique d'une longueur égale à sa période, et l'unicité du plat que nous venons de remarquer, entraîne l'invariance du plat tout entier par la translation définie par γ.

Considérons maintenant les séquences de faces visitées par un segment géodésique du plat en question, parallèle à γ et de longueur sa période. On peut penser que l'on déplace γ parallèlement à elle-même dans son plat. Puisque le polyèdre est fini, ces séquences sont, elles aussi, en nombre fini. Nous allons donc retrouver deux géodésiques γ' et γ'' parallèles à γ qui déterminent la même séquence. Alors, l'unicité de la façon de compléter les bandes nous donne une périodicité dans une autre direction (toutes les faces ajoutées sont entièrement déterminées par les secteurs concaves qu'elles viennent compléter).

Pour illustrer cela, nous avons fait cet exercice dans le cas du polyèdre C_1 (voir figure 9). Pour la géodésique que l'on a considérée, les séquences comportent 4 faces. Nous sommes partis de la séquence $(eagf)$ et nous avons vu apparaître deux fois la séquence $(ceea)$. Sur la figure, un domaine fondamental est délimité par un contour en trait gras.

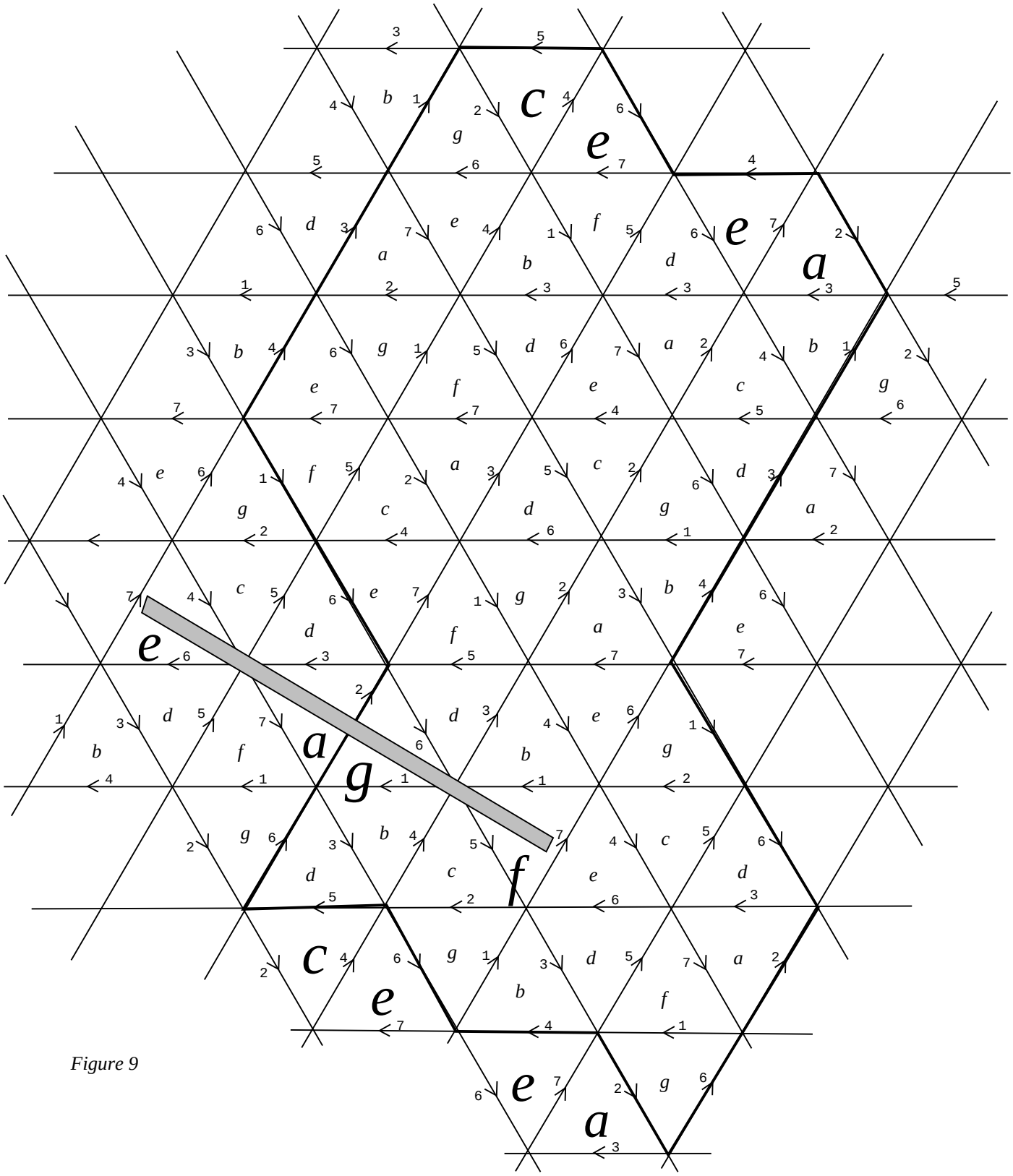


Figure 9

2.9 Groupes automatiques

Tout d'abord, rappelons rapidement quelques notions sur les groupes automatiques (voir [E] pour plus de détails). Soit Γ un groupe engendré par une partie finie symétrique S. Pour que Γ soit automatique, il faut d'abord trouver un automate fini A dont le langage est une partie $\mathcal{L}(A) \subset S^*$ du monoïde libre sur S, et tel que la projection naturelle $\pi : \mathcal{L}(A) \longrightarrow \Gamma$ soit bijective. L'élément $\pi^{-1}(\gamma)$ est appelé la forme normale de γ. Nous l'imaginerons comme un chemin tracé dans le graphe de Cayley du groupe Γ qui relie l'élément neutre à γ. La condition d'automaticité exprime le fait que pour chaque $s \in S$, la forme normale de γs se calcule automatiquement à partir de celle de γ. Sans entrer dans la définition précise, rappelons seulement le critère suivant extrait de [E].

Si la forme normale $\pi^{-1}(\gamma)$ est une géodésique pour tout γ, et s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $s \in S$ et tout $\gamma \in \Gamma$, la distance de Hausdorff entre $\pi^{-1}(\gamma)$ et $\pi^{-1}(\gamma s)$ est inférieure à C, alors, le groupe Γ est automatique.

Considérons maintenant pour groupe Γ, le groupe fondamental d'un polyèdre P orientable, triangulaire à un seul sommet. En particulier, on pourra penser à nos 5 polyèdres pour lesquels chaque arête est incidente à trois faces. En général, chaque arête est incidente à $q+1$ faces.

Proposition 2.9.1 *Considérons les 7 (ou $2q+3$) générateurs canoniques donnés par les arêtes. Alors, il existe une manière géométrique naturelle de déterminer une forme normale pour tout élément de π_1 qui assure que $\pi_1(P)$ est automatique au sens de [E].*

DÉMONSTRATION. Fixons nous un point base dans $\widetilde{P}$. L'idée dans ce résultat se situe autour de la proposition 2.8.1 précédente. Considérons un mot en les générateurs. Si ce mot correspond à une géodésique (singulière), on le considére comme une forme normale. Sinon, le segment géodésique qu'il définit, se trouve contenu dans un plus petit convexe (un parallélogramme). Ce segment relie les deux sommets opposés d'angles $\pi/3$ de ce parallélogramme (les deux autres angles valent, bien entendu $2\pi/3$).

Alors, deux formes normales viendraient à l'esprit (voir la figure 10). On pourrait choisir d'exprimer la diagonale comme le grand côté suivi du petit, ou bien le contraire. Nous choisissons le sens qui oriente positivement le parallélogramme. Voilà pourquoi nous avons supposé les polyèdres orientables. Mais les choses marcheraient tout aussi bien en utilisant l'ordre alphabétique pour choisir l'une ou l'autre de ces deux formes candidates. Cependant, on perdrait le caractère entièrement géométrique du choix de la forme normale.

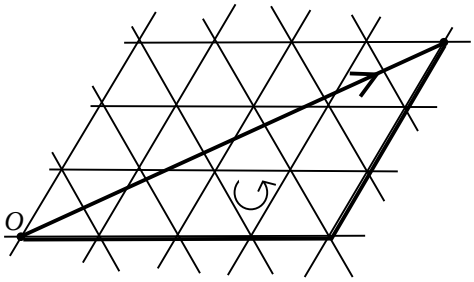


Figure 10

Nous avons donc défini une forme normale pour chaque $\gamma \in \Gamma$ qui est bien de longueur minimale dans le système de générateurs choisi. Vérifions maintenant le critère rappelé au début de ce paragraphe. Multiplions une géodésique par un générateur. Six cas peuvent se produire (voir la figure 11).

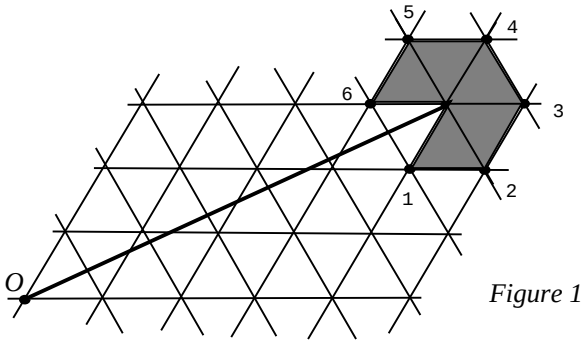


Figure 11

Dans les cas 1 ou 4, une simplification se produit ; le nouveau mot obtenu est alors exactement la nouvelle forme normale. Dans les cas 2 et 3, la nouvelle forme normale a une seconde partie (après le changement de direction) à distance un de celle de γ et leurs premières parties sont identiques à un générateur près. Finalement, les cas 5 et 6 sont analogues aux cas 2 et 3. $\square$

Nous pouvons utiliser cela pour calculer extrêmement facilement la fonction de croissance de ces groupes pour le système de générateurs naturel dont il est question dans ce paragraphe. En effet, un mot de longueur n est exactement la donnée d'un segment géodésique singulier de longueur $p \leq n$, suivi d'un autre de longueur $n - p$ formant un angle de $\pi/3$ avec le précédent. Chaque élément du groupe est déterminé par exactement deux tels bords de parallélogramme, sauf dans le cas où il se trouve sur un rayon singulier. Dénombrons ces bords. Pour le premier segment, nous avons 14 choix, ou, plus généralement, $2(q^2+q+1)$. Ensuite, pour prolonger un segment dans son alignement, nous avons 4 choix (ou q^2). Enfin, pour obtenir un segment formant un angle de $\pi/3$ avec le précédent, nous avons 6 choix (ou $q(q+1)$). Pour former un mot de longueur n, la décision de former l'angle de $\pi/3$ peut se prendre à $n-1$ moments différents: après avoir alignés 1, 2, ..., ou $n-1$ segments. Il y a donc $(q^2+q+1) \times q(q+1) \times q^{2(n-2)} \times (n-1)$ éléments de longueur n qui s'obtiennent par une ligne brisée. En ajoutant ceux qui correspondent à une ligne droite, on obtient finalement, en notant B_n le nombre d'éléments de longueur n :

$$B_n = \frac{(q^2+q+1)}{q^4}(q(q+1)n + q(q-1))q^{2n}.$$

Nous retrouverons ce résultat dans le chapitre suivant par une autre méthode et nous calculerons alors le fonction de croissance qui est rationnelle.

Chapitre 3

Sur les immeubles triangulaires

3.1 La tour des links dans un immeuble triangulaire

3.1.1 Introduction

Nous allons essayer de mieux comprendre les immeubles triangulaires à la lumière des sept polyèdres symétriques que nous connaissons. La construction de la tour sera très explicite dans le cas le plus simple (q=2), un peu moins dans le cas général. J. Tits démontre que dès le deuxième étage, il apparaît des différences entre immeubles qui avaient des premiers étages identiques. Ce fait devient limpide sur nos dessins. Devient aussi limpide l'existence d'immeubles triangulaires non classiques. On utilisera très fortement le théorème du premier chapitre dans sa version généralisée aux polyèdres non nécessairement finis.

Dans un premier temps, on essayera de comprendre comment se construit la sphère de rayon deux au-dessus du link. On obtiendra ainsi tous les candidats à être des sphères de rayon deux dans un immeuble triangulaire. Nous verrons ensuite que chacun de ces candidats est admissible.

3.1.2 Le link d'ordre 2

Considérons un immeuble triangulaire X, par exemple le revêtement universel d'un des 7 polyèdres symétriques. Dans X, fixons nous un sommet S. Le link L_1 en ce sommet (ou link d'ordre un) s'identifie à la sphère de rayon (combinatoire) un. Regardons maintenant la sphère de rayon $1 + \varepsilon$. Ce sera cette sphère que nous appellerons link d'ordre 2 au sommet S, on le note L_2. Les longueurs des arêtes ne nous intéressent pas. L_2 peut se voir au-dessus de L_1 sachant que X est étoilé sur S. Dans le cas des exemples, au-dessus d'une arête il y en aura 10 formant deux arêtes de poisson (voir figure 1).

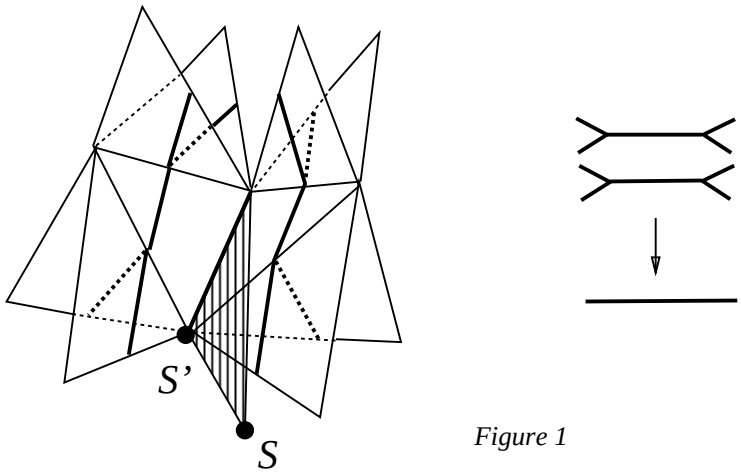


Figure 1

Essayons de construire L_2 à partir de L_1. Pour cela commençons par le cas le plus simple, celui des 7 exemples.

Six arêtes de poisson viennent se recoller au-dessus d'un sommet de L_1.

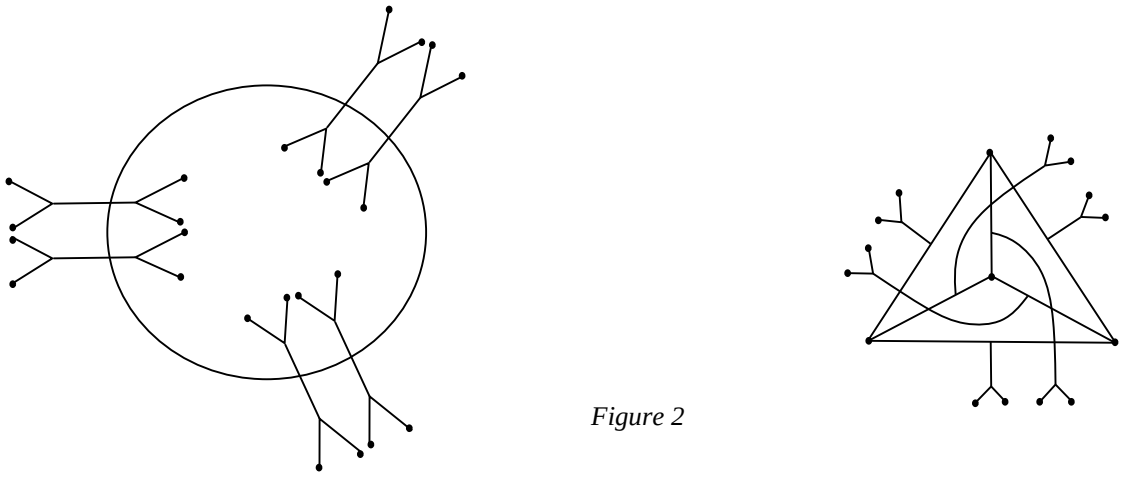


Figure 2

Pour mieux comprendre ce recollement, nous allons regarder l'ensemble des embouts des arêtes pour voir le graphe qu'ils forment (voir figure 2). Sur la figure 1, regardons le link au sommet S'. Pensons à l'arête SS' dans ce link comme à une droite à l'infini. Le dessin s'éclaire alors : les six embouts sont les six droites restantes dans le plan projectif quand on lui a enlevé la droite à l'infini. Ils vont par paires de droites parallèles. L'ensemble cherché est donc un plan affine. Dans le cas $q = 2$, on peut y penser comme à un tétraèdre: les points sont les sommets et les droites les milieux des arêtes (deuxième partie de la figure 2). Deux droites parallèles sont deux droites opposées dans le tétraèdre.

Ainsi se construit donc un candidat link d'ordre deux L_2 au-dessus du link L_1 :

1. Au-dessus de chaque arête, en placer q,

2. Au-dessus de chaque sommet, placer un plan affine,

3. Relier les arêtes aux plans affines vers lesquels elles se dirigent, en respectant le parallélisme.

Dans les exemples simples, cela donne la figure 3.

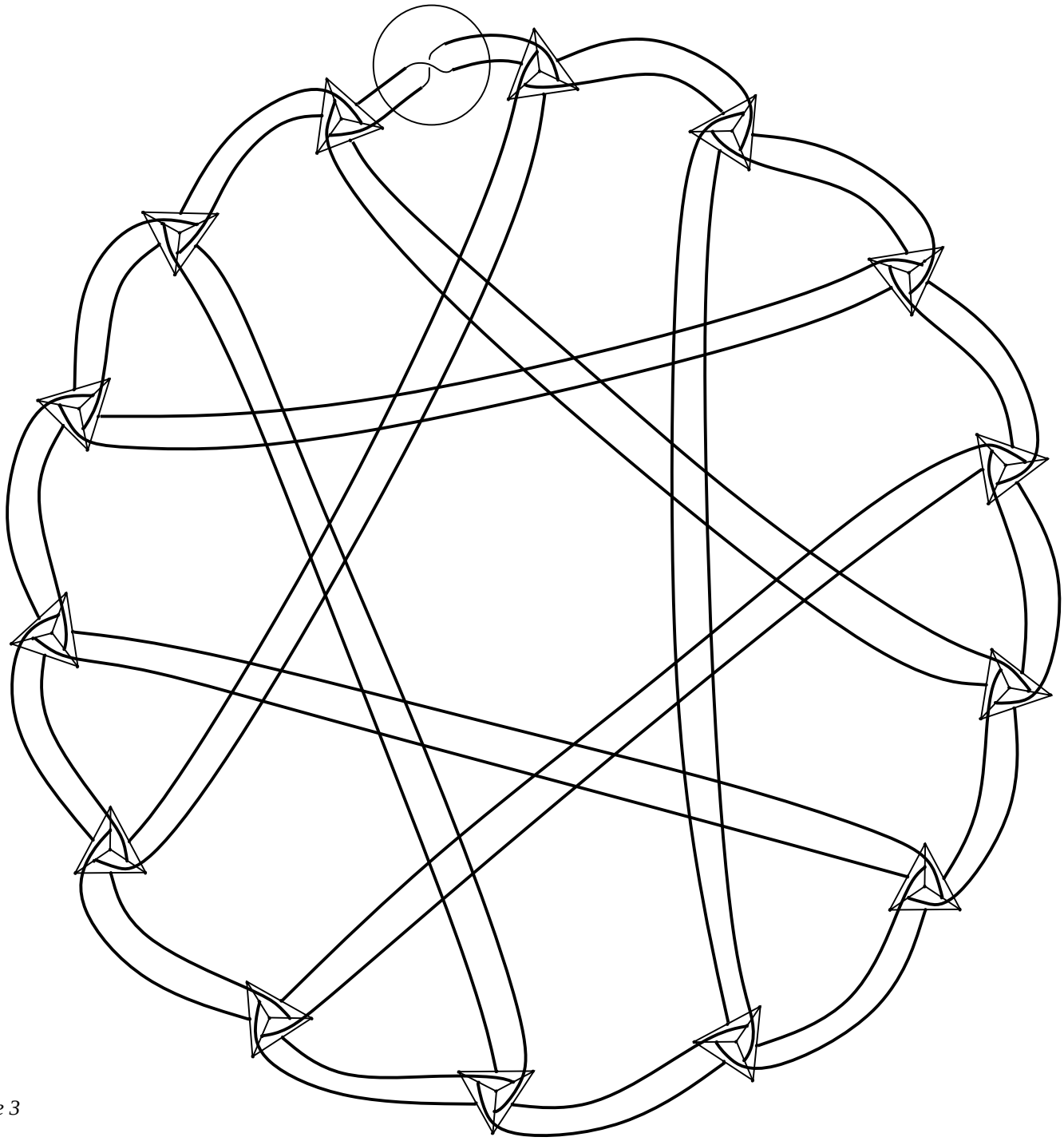


Figure 3

On voit alors apparaître quelque chose d'intéressant démontré dans [T1] :

THÉORÈME 3.1 *(J. Tits) Il y a exactement deux classes d'isomorphismes de links d'ordre 2 dans les immeubles triangulaires correspondant à* $q = 2$.

DÉMONSTRATION. Observons le "shadok" dessiné à droite de la figure 2. L'action

d'un demi-tour sur le tétraèdre correspond à la permutation simultanée de deux des trois directions. Considérons maintenant un dessin dans le plan d'un candidat link d'ordre deux. La symétrie que nous venons de mettre en évidence, nous informe qu'on peut supposer qu'autour d'un même shadok, ne part au plus qu'une seule direction vrillée. Ces brins vrillés, c'est-à-dire qui se croisent, se trouvent alors isolés. Prenons-en un et rejoignons-le abstraitement au plus proche par un plus court chemin (dans L_1). En opérant des demi-tours sur les tétraèdres à l'intérieur du chemin, on fait glisser une vrille jusqu'à ce qu'elle touche l'autre et alors ces deux dernières vrilles se détruisent ensemble. Ainsi, il apparaît au plus deux classes d'isomorphismes de link suivant qu'il reste ou non, un brin vrillé. Bien sûr, il reste à voir pourquoi le link non vrillé et le link une fois vrillé ne sont pas isomorphes. Il suffit pour cela de constater qu'un automorphisme de L_2 est toujours au-dessus d'un automorphisme de L_1. L'ensemble des petits cycles de longueur 6 qui correspondent aux tétraèdres est préservé. Ainsi un automorphisme envoie tétraèdre sur tétraèdre. Pour conclure, il faudrait voir que ces deux candidats-links d'ordre 2 apparaissent effectivement dans un immeuble triangulaire. On verra plus loin que tous les links sont réalisables. On pourrait aussi calculer les links de nos 7 exemples et constater que les deux classes sont effectivement représentées. On peut aussi calculer les links d'ordre 2 des familles classiques. □

Pour $q \geq 3$, il y a beaucoup plus de classes d'isomorphismes (voir [T]). Regardons simplement le cas $q = 3$. Ici, les links correspondent au plan projectif sur le corps à trois éléments (c'est le seul link possible pour $q = 3$). Les isomorphismes de l'espace affine au dessus d'un sommet sont engendrés par les translations et les homothéties. Les premières fixent une direction et permutent cycliquement les trois autres ; les secondes permutent deux des trois brins de chaque direction. (voir la figure 4)

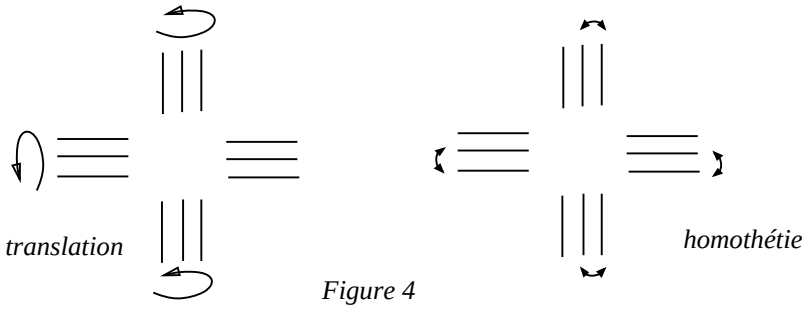


Figure 4

Une droite affine d'au moins 4 points, possède moins de transformations affines que de bijections. Ainsi, à partir de $q = 4$, il apparaît des links d'ordre 2 qui ne peuvent pas être links d'immeubles classiques. Expliquons cela plus en détail.

Un sommet d'un link correspond à une arête. Pensons à cette arête comme à une droite projective, via le link en question. Un automorphisme du link qui fixe cette arête donne une transformation projective de cette droite. Mais si cet automorphisme se prolonge en une isométrie de l'immeuble tout entier, c'est que la permutation sur cette droite projective est encore une homographie quand la structure projective provient cette fois de l'autre côté de l'arête. Cela nous amène finalement à la définition suivante :

Définition 3.1.1 *On dira qu'un immeuble est régulier si toutes les liaisons que nous venons de définir sont projectives.*

Ainsi, dans un immeuble régulier, à une arête correspond une droite projective. Notons bien sûr, qu'un immeuble classique est régulier. L'existence d'immeubles non classiques

deviendra alors claire grâce à cette notion. En effet, il suffit de permuter les brins suivant une transformation qui n'est pas un homographie pour obtenir un link d'ordre deux qui ne peut être classique.

3.1.3 La tour des links

Nous allons regarder à quoi ressemblent les links d'ordre supérieur dans X. Pour passer aux links d'ordre 3 et plus, il y a une petite difficulté qui provient du fait suivant :

Pour la sphère S_1, tous les sommets sont équivalents. Par contre, dans S_2 et dans S_n pour $n \geq 2$, il apparaît deux types de sommets : les coins et les autres. Les coins se projettent sur un sommet de S_1, alors que les non coins se trouvent au-dessus d'une arête. (voir la figure 5)

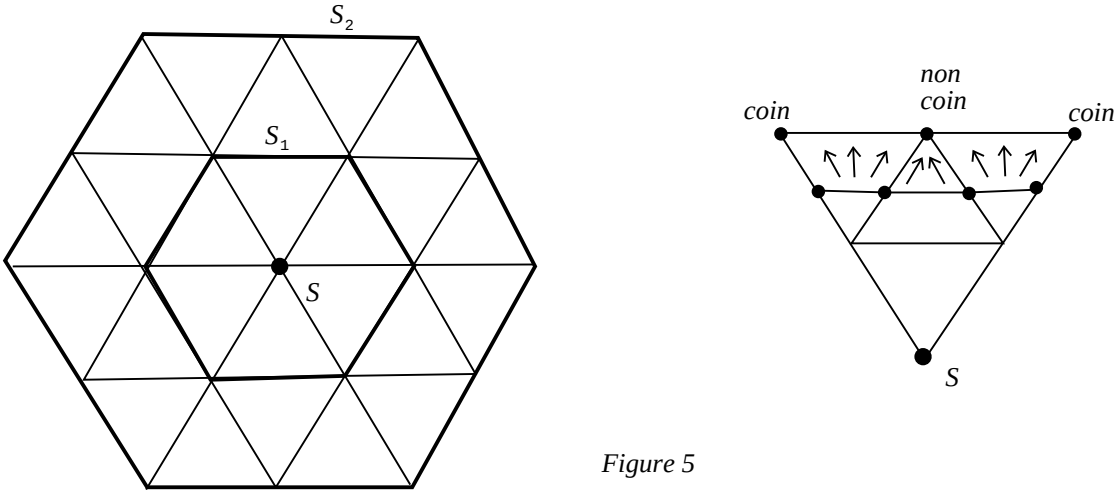
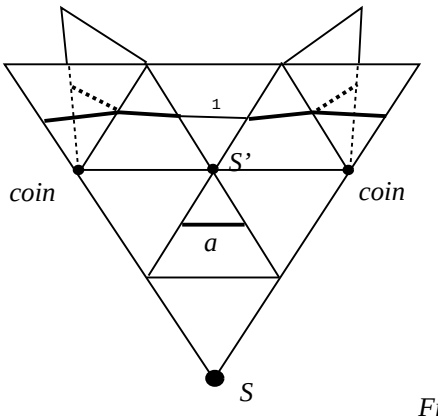


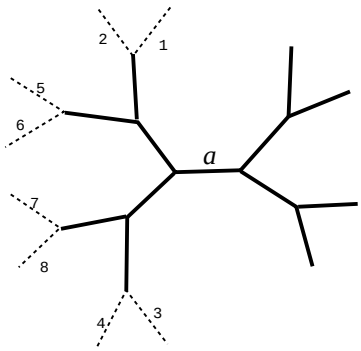
Figure 5

Une autre chose à remarquer est que la sphère S_2 et le link d'ordre deux L_2 ne sont pas identiques. Pour passer de L_2 à S_2, il faut écraser les arêtes qui ont été dédoublées pour former L_2 au dessus de L_1 (se référer à la figure 5).

Remarquons que les sommets de S_2 non coins auront une valence 4 dans les exemples et $2q$ en général. Voyons maintenant comment obtenir L_3 au-dessus de S_2. Ensuite il en sera de même pour obtenir L_{n+1} au-dessus de S_n pour $n \geq 2$. Se référer à la figure 6 pour ce qui suit.

1. Dédoubler les arêtes de S_2 (ou, en général, en mettre q au-dessus de chacune),
2. Au-dessus d'un coin, placer un plan affine (comme pour former L_2 au-dessus de L_1),
3. Au-dessus des autres sommets (les non coins), ajouter le morceau de plan affine manquant (on précisera cela plus loin).





Link en S'

Figure 6

De même qu'au niveau d'un coin, on a déjà remarqué qu'il fallait compléter un plan affine pour former un plan projectif ; dans l'étape 3, il s'agit de compléter un graphe en un plan projectif. On constate que le graphe en question est un arbre et donc qu'il se complète en un plan projectif (l'étude des immeubles métriques du premier chapitre nous permet de voir cela). Dans les exemples, c'est un octogone qu'il faut ajouter. Nous pouvons (toujours dans les exemples) être plus explicites. La figure 7 montre comment les huit brins viennent se recoller. Une paire sur des sommets opposés et deux paires provenant d'un même sommet sur des diagonales orthogonales.

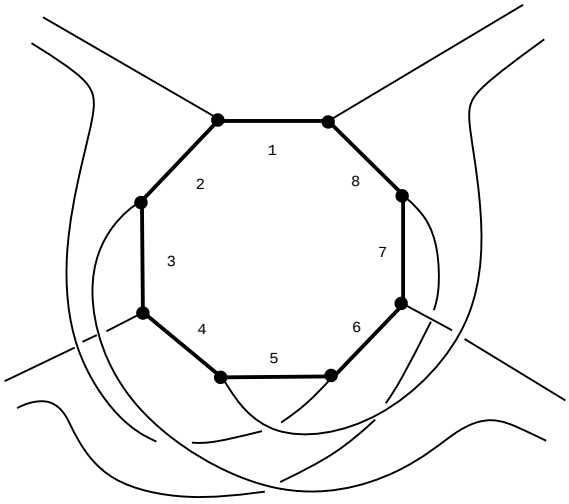


Figure 7

En conclusion nous pouvons résumer la construction que nous venons d'expliciter par la figure schématique suivante :

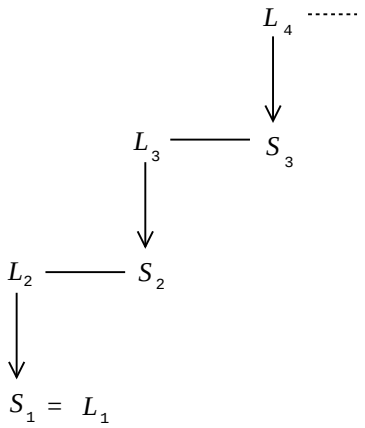


Figure 8

Jusqu'ici, nous avons regardé comment était construits les links d'un immeuble. Maintenant, on se propose d'étudier la réciproque et donc de construire un immeuble qui repose sur une tour. Pour cela donnons la définition suivante :

Définition 3.1.2 *Une tour de links est une succession infinie d'éclatements et d'écrasements au-dessus d'un immeuble hexagonal avec les règles décrites plus haut.*

À une tour de links correspond un complexe qui vérifie le critère local des immeubles (être de rang 2). Ainsi, grâce au théorème 1.4 du premier chapitre, puisque ce complexe est simplement connexe, c'est un immeuble triangulaire. Ce résultat s'énonce ainsi :

THÉORÈME 3.2 *À une tour de links correspond un et un seul immeuble triangulaire pointé.*

À la lumière de cette tour de links, on peut faire deux remarques sur ces immeubles.
REMARQUE 1 : Il existe des immeubles triangulaires pour $q = 2$ qui ne sont pas homogènes sur les sommets étiquetés.

Vérifions cela. Donnons-nous les quatre premiers étages d'une tour centrée sur le sommet S. Sur le second étage, fixons-nous un point S' de même étiquette que S. Si son link d'ordre 2 est identique à celui de S, il est possible de le modifier en permutant deux faces de la sphère de rayon 4 (voir le figure 9). Ensuite, on complète la tour d'une façon quelconque et on obtient ainsi un immeuble avec la propriété voulue. En fait, à travers l'étiquetage, nous avons voulu souligner le fait qu'il est possible de créer un immeuble, en ayant comme contrainte que deux sommets choisis aient des links d'ordre 2 différents.

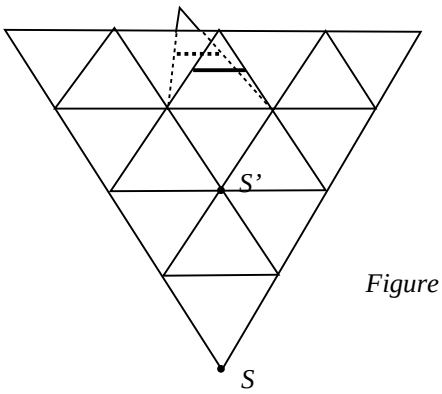


Figure 9

REMARQUE 2 : Il existe un infinité non dénombrable d'immeubles triangulaires, même dans le cas $q = 2$.

Il y a un nombre dénombrable de sommets dans un immeuble et donc à un immeuble, on ne peut associer qu'un nombre au plus dénombrable de tours distinctes. Or il y a une infinité non dénombrable de tours (à chaque étage, on a au moins un choix à faire). Ainsi, même en restant parmi les immeubles triangulaires correspondant à $q = 2$, on obtient une infinité non dénombrable d'exemples deux à deux non isomorphes. Remarquons qu'une sphère de rayon n détermine par projections successives, tous les étages inférieurs de la tour et qu'il y a donc au moins 2^n sphères de rayon n deux à deux non isomorphes.

3.1.4 Fonction de comptage

Considérons, comme à la fin du chapitre précédent, un polyèdre triangulaire P à un seul sommet. On le supposera orientable. On note toujours $q+1$ le nombre de faces incidentes à une arête. On pourra penser à un de nos 5 polyèdres dans le cas $q = 2$. Choisissons les $q^2 + q + 1$ générateurs composés des arêtes. Dans $\tilde{P}$, nous fixons un sommet. Alors, l'ensemble des sommets s'identifie à $\pi_1(P)$. Ici, il est remarquable que les éléments de longueur n (dans le système de générateurs choisi) soient exactement les sommets de la sphère de rayon n. Essayons de calculer ce nombre B_n de mots de longueur n. Notons P_n le nombre de sommets "coins" (ou sommets qui se projettent sur des sommets dans S_1), de même notons Q_n le nombre de sommets "non coins" (ou bien sommets sans nom dans la terminologie du paragraphe suivant). Enfin, notons A_n le nombre d'arêtes de S_n. Les données initiales sont les suivantes :

$$P_1 = 2(q^2 + q + 1) \qquad Q_1 = 0 \qquad A_1 = (q+1)(q^2 + q + 1).$$

Compte-tenu de la construction de la tour des links, les deux relations de récurrence suivantes viennent immédiatement :

$$P_{n+1} = q^2 P_n \qquad Q_{n+1} = qA_n.$$

Pour le nombre d'arêtes de S_{n+1}, on compte d'une part les arêtes issues des coins (revoir la figure 2), et celles issues des sommets sans nom (revoir la figure 6). Il vient alors :

$$A_{n+1} = q^2(q+1)P_n + q^3 Q_n.$$

Le nombre qui nous intéresse est $B_n = P_n + Q_n$. Un petit calcul nous fournit :

$$B_n = \frac{q^2 + q + 1}{q^3}((q-1) + (q+1)n)q^{2n}.$$

Il est intéressant de calculer la série :

$$F(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \ z^n = \frac{1}{q^3} + \frac{(q^2 + q + 1)}{q^3} \frac{(2q^2 z + q - 1)}{(1 - q^2 z)^2}.$$

Cette fonction est une fraction rationnelle qui s'écrit encore :

$$F(z) = \frac{qz^2 + 2(q+1)z + 1}{(1 - q^2 z)^2}.$$

Ses deux zéros simples sont $(-(q+1) \pm \sqrt{q^2 + q + 1})/q$. De plus, on peut prendre la valeur de cette fraction en 1. Le résultat est intéressant puisqu'on obtient exactement l'inverse de la caractéristique d'Euler du polyèdre P. Plus précisément,

$$\chi(P) = \frac{1}{F(1)} = (q-1)^2(q+1)/3.$$

Ce résultat très souvent constaté en pratique, ne semble pas encore bien compris. En passant, notons que si q est multiple de 3, la caractéristique d'Euler n'est pas entière. En effet, c'est à cela que l'on voit qu'il n'y a pas de polyèdre à un sommet dans ce cas (il en faut au moins trois).

3.1.5 Conclusion

En conclusion de cette partie, nous pouvons noter que la construction à partir d'une tour fournit un immeuble pointé et ne maîtrise en rien l'aspect homogène. Quel lien y a-t-il entre deux tours d'un même immeuble centrées en des points différents? Comment reconnaître l'homogénéité?

Par contre, nous avons obtenu des moyens simples pour construire des immeubles localement symétriques mais pas symétriques car pas réguliers, ou bien, pour construire des immeubles non homogènes. De plus, en particulier dans le cas $q = 2$, nous pouvons théoriquement distinguer deux immeubles homogènes (par exemple classiques) en comparant leurs tours. Nous verrons dans le paragraphe suivant que le link d'ordre trois pourra faire apparaître le caractère non classique dans le cas $q = 2$.

3.2 La propriété de Desargues du bord à l'infini vue à distance finie

3.2.1 Introduction

Le bord à l'infini d'un immeuble triangulaire, ainsi que ses links, sont des immeubles hexagonaux, donc des plans projectifs. Rappelons qu'un plan projectif qui vérifie la propriété de Desargues est le plan projectif sur un corps. On se propose ici de vérifier cette propriété de Desargues du bord à l'infini, à distance finie, à travers les sphères S_n de rayon n. Cela nous donnera un critère simple qui assure du caractère non classique d'un immeuble.

Considérons donc un immeuble triangulaire X.

3.2.2 Points et droites de S_n.

Fixons un sommet de X et regardons la tour des links en ce sommet.

Définition 3.2.1 *Dans le graphe S_n, on appellera points (resp. droites) les sommets qui se projettent sur des points (resp. droites) dans S_1. Les autres sommets sont sans nom.*

Avec cette définition, on conviendra qu'un point est sur une droite s'il y a un chemin dans S_n de l'un à l'autre, ne rencontrant que des sommets sans nom.

REMARQUE. Par deux points de S_n, qui se projettent sur deux points distincts dans S_1, passe une et une seule droite. Par contre, par deux points au-dessus d'un seul dans S_1 passent plusieurs droites. Par exemple, dans le cas $q = 2$, par deux tels points de S_2, passent exactement deux droites (voir à la construction de la tour des links).

3.2.3 Propriété de Desargues au niveau n

Pour commencer, rappelons la propriété de Desargues dans un plan projectif.

Définition 3.2.2 *Une configuration de Desargues dans un plan projectif est la donnée de deux vrais triangles (ABC) et $(A'B'C')$ en perspective ; c'est-à-dire tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') (appelées fuyantes) soient concourantes.*

Définition 3.2.3 *On dit qu'un plan projectif vérifie la propriété de Desargues si pour toute configuration de Desargues (ABC) et $(A'B'C')$, les trois points $(AB)\cap(A'B')$, $(AC)\cap(A'C')$ et $(BC)\cap(B'C')$ sont alignés.*

Nous pouvons illustrer cette propriété par la très célèbre figure suivante :

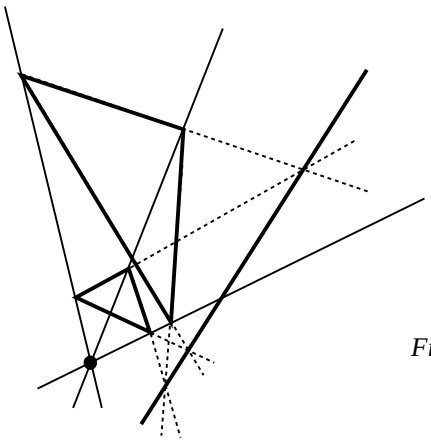


Figure 10

Ces définitions étant précisées, nous pouvons rappeler le théorème classique suivant.

THÉORÈME 3.3 *Un plan projectif P vérifie la propriété de Desargues si et seulement si il existe un corps K tel que $P = P^2(K)$.*

Le caractère nécessaire de cette propriété est un exercice bien connu. Voir [A] pour la démonstration de la réciproque.□

Dans le cas de la sphère S_n, entendons la propriété de Desargues en ce sens : pour toute configuration de Desargues qui est la projection d'une configuration de Desargues à l'infini, les projetés des trois points d'intersections de la configuration à l'infini sont sur une même droite.

Nous pouvons maintenant énoncer le fait qui nous a conduit à toutes ces définitions.

Proposition 3.2.1 *Le plan projectif à l'infini vérifie la propriété de Desargues si et seulement si cette propriété est vérifiée par toutes les sphères S_n.*

DÉMONSTRATION. On rappelle que nous avons pointé un immeuble une fois pour toutes. Dans un sens, cet énoncé est tautologique. Supposons donc la propriété de Desargues vérifiée à tous les niveaux finis. Considérons une configuration de Desargues à l'infini. Dans chacunes des sphères S_n, nous obtenons par hypothèse une (ou plusieurs) droites qui contiennent les trois projections des trois points d'intersection dont on veut démontrer qu'ils sont alignés à l'infini. Notons $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des droites solutions au niveau de S_n. Notons que $\mathcal{D}_{n+1}$ se projette naturellement sur $\mathcal{D}_n$. Ainsi, il existe donc une suite (D_n) de droites telles que $D_n \in \mathcal{D}_n$ et D_{n+1} se projette sur D_n. Cette suite détermine à l'infinie une droite qui répond à la question. □

Nous allons voir maintenant en quoi cette caractérisation peut être intéressante.

3.2.4 Des sphères non classiques

Dans notre immeuble, nous notons $q+1$, comme de coutume, le nombre de faces qui contiennent une arête donnée. Nous distinguerons deux catégories bien distinctes : le cas $q=2$ et le cas $q \geq 3$. Dans le second cas, il est possible de nier la propriété de Desargues dès le niveau 2 alors que dans le premier on ne peut le faire qu'à partir du niveau 3. De plus il est possible de faire cela tout en conservant des liaisons projectives. En d'autres termes, un immeuble peut être régulier sans pour autant vérifier la propriété de Desargues. C'est peut-être dans cette dichotomie (à partir du niveau 2 ou bien à partir du niveau 3 seulement) que réside la raison profonde du fait que [CMSZ] trouvent des groupes qui opèrent simplement transitivement sur les sommets d'immeubles non classiques dans le cas $q=3$ et pas dans le cas $q=2$. C'est aussi cela qui peut nous faire penser que les polyèdres B_2 et B_4 sont classiques.

Le cas $q \geq 3$

Afin d'avoir une image en termes de relations d'incidence d'une configuration de Desargues, voici un graphe (figure 11) qui correspond au cas le plus général. Au centre, on trouve le point de concours des trois fuyantes. Si la propriété de Desargues est vérifiée, la figure se complète symétriquement. Dès que $q \geq 3$, il est possible de trouver une telle configuration. Sur la figure, les points noirs correspondent à des points et les blancs à des droites.

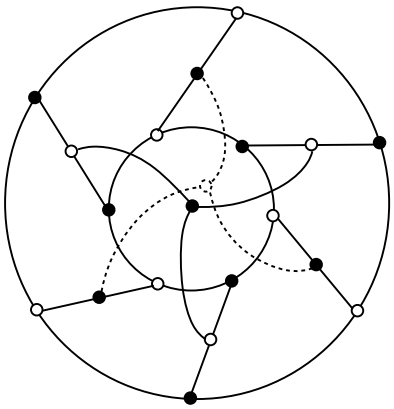


Figure 11

Fixons nous un link (classique par exemple) avec $q \geq 3$. Nous allons voir qu'il est possible de construire un link d'ordre 2 au-dessus du link en question, qui ne vérifie pas la propriété de Desargues. Il faut ici mettre une chose au clair. La définition que nous avons donnée de cette propriété au niveau S_n dépend de l'immeuble tout entier ; cependant, on peut trouver un link d'ordre 2 qui ne pourra vérifier cette propriété quelque soit l'immeuble dans lequel il est placé. Pour cela, vérifions qu'une configuration de Desargues générale (comme celle qui est dessinée plus haut), provient toujours d'une configuration de Desargues à l'infini. Nous allons nous assurer que le relèvement à un étage immédiatement supérieur est possible.

Le lemme suivant est trivial, mais il clarifie les choses.

Lemme 3.2.1 *Dans un sphère S_n, considérons trois droites δ_1, δ_2 et δ_3 passant par le point O et deux droites D_1 et D_2 immédiatement au-dessus de δ_1 et δ_2 respectivement. Alors il existe une droite D_3 au-dessus de δ_3 qui passe, tout comme D_1 et D_2 par O' au-dessus de O.*

DÉMONSTRATION. Pensons au passage d'une sphère au link immédiatement supérieur. On se souvient qu'au-dessus d'un point, on place un plan affine et que les arêtes issues de ce sommet peuvent être vues comme les directions dans ce plan. Traduisons le lemme dans ce langage. Considérons trois directions δ_1, δ_2 et δ_3. Fixons nous deux droites D_1 et D_2 dans les directions respectives δ_1 et δ_2. Alors, existe-t-il une droite D_3 dans la direction δ_3, passant par le point d'intersection entre D_1 et D_2? La réponse est claire. $\square$

Considérons une configuration de Desargues de point de fuite O (i.e. $O = \delta_1 \cap \delta_2 \cap \delta_3$). On peut relever O en O' duquel partent trois brins rejoignant les droites au-dessus des δ_i (utiliser le lemme). Maintenant, relevons les δ_i en D_i de tel sorte que les points A, B, C, A', B', C' se relèvent bien en des points passant par les D_i correspondantes (on utilise ici encore le lemme).

Ainsi, d'étage en étage, on peut relever une configuration de Desargues générique. Cela montre qu'elle provient bien d'une configuration de Desargues de l'infini. Ici se termine notre éclaircissement.

Supposons donc construit un link d'ordre 2 (disons $\mathcal{L}$) au-dessus du link considéré. Relevons une configuration de Desargues générique. Si dans $\mathcal{L}$, cette configuration se complète symétriquement, il suffit de permuter les brins d'un bras du shadok dans lequel se trouve la droite en question, pour qu'elle ne se complète plus symétriquement. Sur la figure 12, le point de concours des trois brins en traits épais représente la fameuse droite en question. Nous avons choisi d'illustrer ce fait par une figure correspondant au cas $q = 2$ pour bien montrer que ce n'est pas ce dernier point qui est mis en défaut dans le cas suivant.

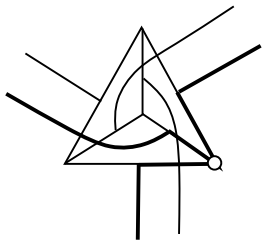


Figure 12

Le cas $q = 2$

Commençons par faire une remarque. Une configuration de Desargues dans le plan projectif $P^2(\mathbb{F}_2)$ est toujours dégénérée. En effet, si on considère deux triangles en perspective, l'un est nécessairement aplati. On peut facilement vérifier cela sur la figure schématique suivante :

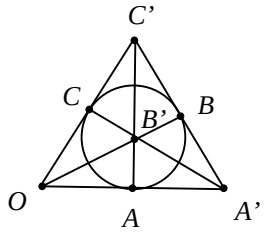


Figure 13

Il convient de noter que la construction du cas précédent n'est pas possible pour $q = 2$. En effet, la droite en question à la fin, fait partie de la configuration. Modifier ses branchements serait modifier la configuration initiale. Dessinons le graphe d'incidence d'une configuration de Desargues dans ce contexte. Sur la figure 14, les trois droites qui se trouvent sur le petit cercle central d'une configuration générique, sont ici confondues en

une seule notée D.

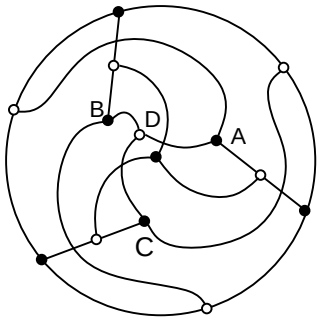


Figure 14

Il est à noter que ce graphe est le plan tout entier. Relevons la première partie de cette configuration (i.e. les deux points sur chacunes des trois droites concourrentes). On peut le faire, comme on l'a vu dans le cas précédent. Alors deux cas peuvent se produire (tout se passe au-dessus de la droite D):

-ou bien les points au-dessus de A, B et C sont alignés,

-ou bien les points d'intersection $(AB) \cap (A'B')$, $(AC) \cap (A'C')$ et $(BC) \cap (B'C')$ sont alignés.

Cette dichotomie se lie directement sur la figure 12 du paragraphe précédent (le shadok). Si trois droites viennent concourir dans ce shadok, les trois autres ne le font pas, et réciproquement. Quoiqu'il en soit, la propriété de Desargues est vérifiée. Le droite en question dans cette propriété étant toujours celle dessinées sur la figure 12.

Passons maintenant au link d'ordre trois. Partons de la configuration de Desargues de la sphère de rayon deux, qui correspond au second cas dans la dichotomie précédente. Il est désormais possible de construire un link d'ordre trois au-dessus d'une telle configuration qui nie la propriété de Desargues. En effet, tous les sommets sont alors différentiés et donc l'argument du cas $q \geq 3$ convient.

3.3 Autour du théorème de Świątkowski

3.3.1 Introduction

J. Świątkowski se pose le problème de savoir dans quels cas, le fait que tous les links d'ordres un et deux soient identiques, détermine un unique immeuble. Dans notre problème, pour $q = 2$, ses résultats ne semblent pas pouvoir s'appliquer en vertu de ceux de J. Tits dans [T3] où on cherche à récupérer le corps qui à servi à la construction d'un immeuble à partir de la seule donnée de l'immeuble.

On peut se poser une question analogue pour $q \geq 3$. Mais faisons tout de suite une remarque. Pour $q \geq 3$, il existe beaucoup plus de links d'ordre 2 (plus de 10000 d'après [T1]) que de quotients de tels immeubles par des groupes opérant simplement transitivement sur les sommets (seulement un cinquantaine dans la classe de ceux de [CMSZ]). Ainsi, on ne peut pas espérer pour chaque link d'ordre 2, existence et unicité d'un immeuble. En effet, l'existence et l'unicité donnent naissance à un immeuble homogène sur les sommets, qui fournira très probablement des polyèdres à un seul sommet.

3.3.2 Un link d'ordre 2 bien particulier

Dans un link d'ordre 2, nous avons déjà distingué deux types de liaisons au-dessus d'une arête de la sphère unité. Il y a les liaisons projectives et les autres. Considérons

un link S (ou sphère unité) qui correspond à un plan projectif provenant d'un corps K avec $q \geq 4$, par exemple $P^2(\mathbb{F}_4)$ (pour $q = 2$ ou 3, on ne peut pas distinguer deux types de liaisons). Dans S, considérons un appartement et trois arêtes adjacentes formant le sous-graphe G dessiné ci-après. Il est bien évident qu'il en existe.

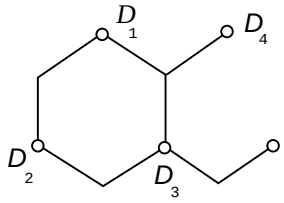


Figure 15

Alors, considérons un link d'ordre deux $\mathcal{L}$, tel qu'au-dessus de G, ses liaisons soient projectives et qu'ailleurs elles ne le soient pas.

Affirmation 3.3.1 *L'application $p : Aut(\mathcal{L}) \longrightarrow Aut(S)$ est triviale.*

DÉMONSTRATION. Soit ϕ un automorphisme de $\mathcal{L}$. L'automorphisme $p(\phi)$ doit fixer point par point le graphe G, car celui-ci n'a pas d'automorphisme. Or un élément de $PGL_3(K)$ qui fixe trois droites D_1, D_2 et D_3 non concourantes est diagonalisable. Et si plus il fixe une autre droite (D_4), c'est l'identité. Ainsi $p(\phi)$ est trivial. □

3.3.3 L'alternative

S'il n'existait pas d'immeuble dont tous les links d'ordre 2 soient $\mathcal{L}$, alors, ça le rendrait intéressant. Il s'agirait alors de comprendre d'où viendrait cette obstruction. Plaçons-nous dans le cas contraire. Un immeuble bâti sur ce modèle local n'aura aucun automorphisme non trivial qui fixe un sommet (la rigidité de $\mathcal{L}$ se propage à tout l'immeuble). On peut aller plus loin et se demander alors si l'un de ces immeubles est homogène, ou a des quotients finis. Bien sûr, s'il y avait unicité, cela donnerait un polyèdre P à un seul sommet dont le π_1 serait exactement le groupe d'automorphismes de $\widetilde{P}$. On peut aussi choisir un $\mathcal{L}$ qui, de plus, ne vérifie pas la propriété de Desargues (c'est évidemment possible).

3.4 Quelques questions

Nous rassemblons ici certaines questions qui sont apparues dans notre parcours et que nous trouvons intéressantes.

1. Dans le cas $q = 2$, la recherche de polyèdres à un seul sommet nous a donné en particulier deux polyèdres B_2 et B_4 de revêtements iniversels différents. Nous nous attachons maintenant à savoir s'ils sont ou non classiques en utilisant les méthodes que nous avons développées. Nous pouvons aussi espérer trouver des polyèdres non classiques parmi les polyèdres à deux sommets. Pour cela, il suffirait que ces deux sommets n'aient pas mêmes links d'ordre deux. Il se pourrait alors qu'ils ne soient même pas symétriques! Dans cette direction, en mélangeant certains revêtements doubles de nos polyèdres à un seul sommet, nous avons obtenu trois polyèdres à deux sommets, qui ne sont revêtements doubles d'aucun polyèdre à un seul sommet. Nous avons calculé que les deux links d'ordre deux et malheureusement, sont les mêmes. Ces polyèdres sont-ils classiques, symétriques?

2. Dans le cas $q = 3$, il serait intéressant de savoir si l'un des exemples non classiques décrits dans [CMSZ], est non symétrique. Pour cela, il s'agirait de trouver par exemple

un cas où le groupe d'automorphismes du link d'ordre deux opère trivialement sur le link d'ordre un.

3. On peut aussi s'attacher à chercher un polyèdre à un seul sommet de géométrie locale celle d'un plan projectif exotique (pour $q = 10$ par exemple). Cela donnerait un bel exemple de polyèdre non classique.

4. Il serait aussi très intéressant de répondre à l'alternative énoncée dans le paragraphe précédent. L'objectif ultime étant d'obtenir un groupe fondamental qui soit exactement le groupe d'isométrie d'un immeuble et qui de ce fait aurait des chances d'être simple.

5. À propos des links d'ordre deux, il serait intéressant de relier la propriété de Desargues à l'invariant introduit par J. Tits dans [T1]. Aussi, il se peut qu'un immeuble homogène qui vérifie la propriété de Desargues au niveau deux soit classique. Auquel cas, cela répondrait partiellement à la première question.

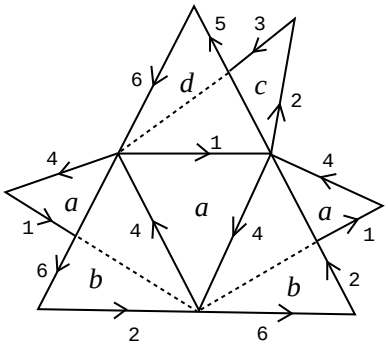
6. Dans un autre registre, nous pouvons essayer de comprendre pourquoi la formule magique $\chi(P) = 1/F(1)$ est valable dans le cas des polyèdres à un seul sommet, et pour le système de générateurs canoniques.

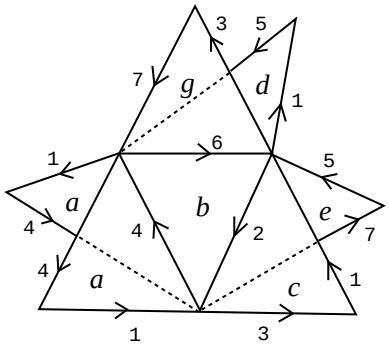
Annexe A

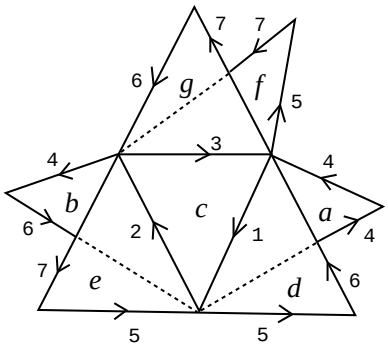
Développements des sept polyèdres

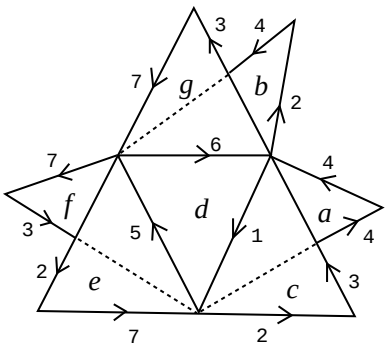
Dans cette annexe, nous développons les revêtements universels de nos sept polyèdres autour de chacune de leurs sept faces. Ainsi, chaque face est incidente à six autres. Une page entière est consacrée aux sept étoiles d'un même polyèdre dont le nom figure en haut de page.

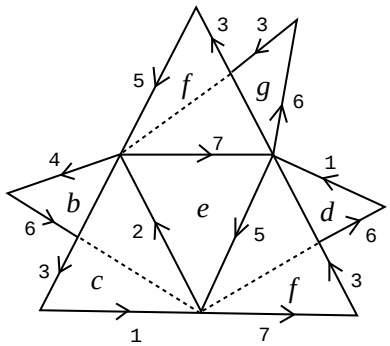
A_1

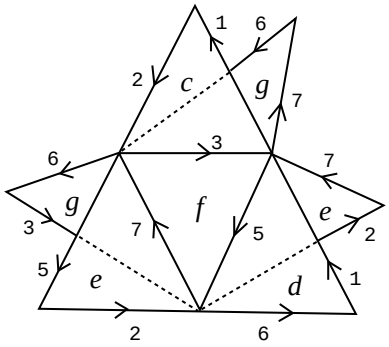

5 3
6 d c 2
4 1 4
a a a
1 4 4 1
6 b b 2
2 6

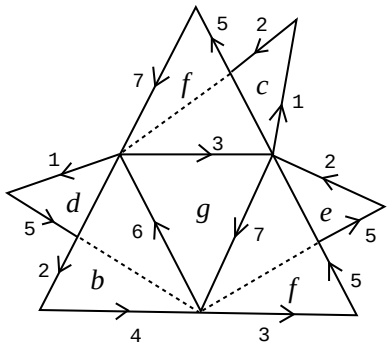

3 5
7 g d 1
1 6 5
a b e
4 4 2 7
4 a c 1
1 3


7 7
6 g f 5
4 3 4
b c a
6 2 1 4
7 e d 6
5 5

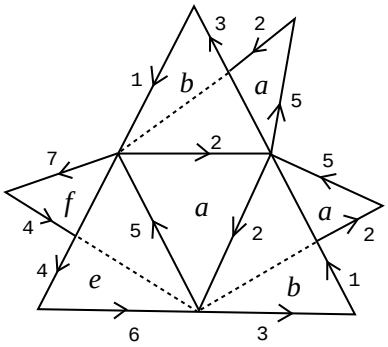

3 4
7 g b 2
7 6 4
f d a
3 5 1 4
2 e c 3
7 2

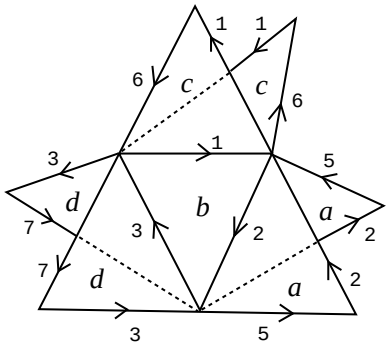

3 3
5 f g 6
4 7 1
b e d
6 2 5 6
3 c f 3
1 7

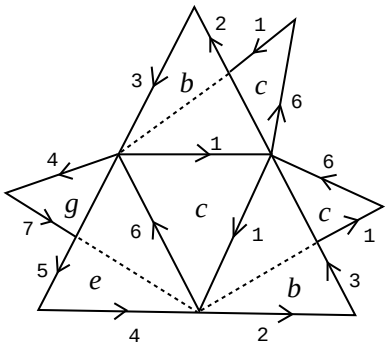

1 6
2 c g 7
6 3 7
g f e
3 7 5 2
5 e d 1
2 6

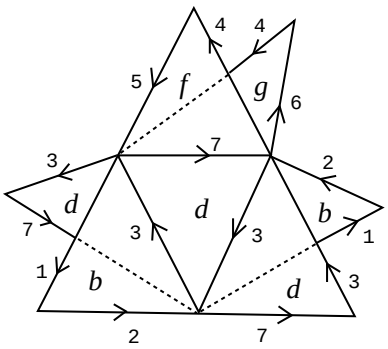

5 2
7 f c 1
1 3 2
d g e
5 6 7 5
2 b f 5
4 3

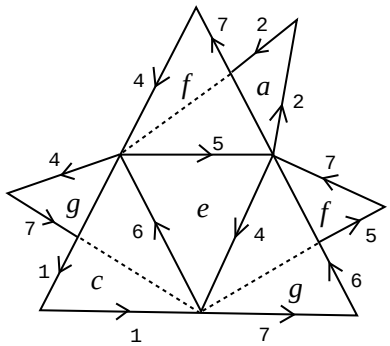
A_3

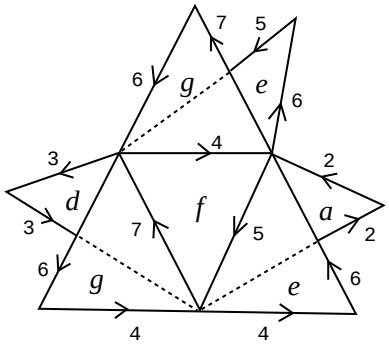

3 2
1 b a 5
7 2 5
f a a
4 5 2 2
4 e b 1
6 3

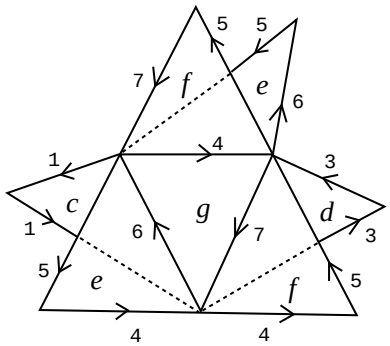

1 1
6 c c 6
3 1 5
d b a
7 3 2 2
7 d a 2
3 5


2 1
3 b c 6
4 1 6
g c c
7 6 1 1
5 e b 3
4 2

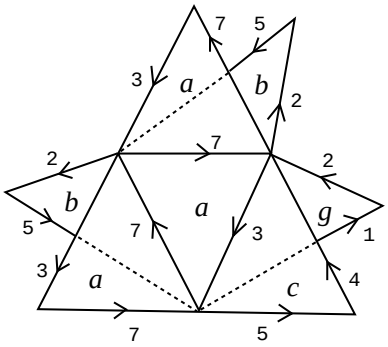

4 4
5 f g 6
3 7 2
d d b
7 3 3 1
1 b d 3
2 7

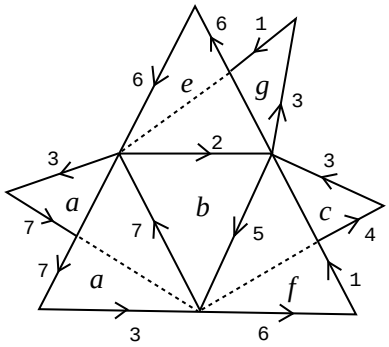

7 2
4 f a 2
4 5 7
g e f
7 6 4 5
1 c g 6
1 7

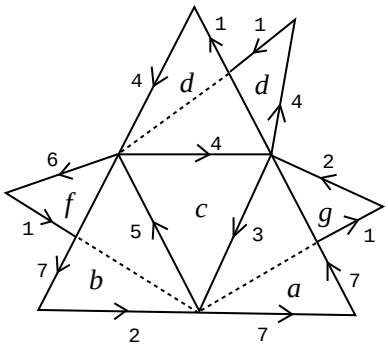

7 5
6 g e 6
3 4 2
d f a
3 7 5 2
6 g e 6
4 4

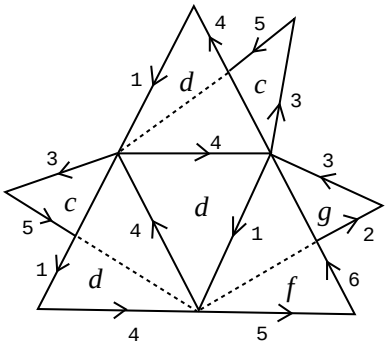

5 5
7 f e 6
1 4 3
c g d
1 6 7 3
5 e f 5
4 4

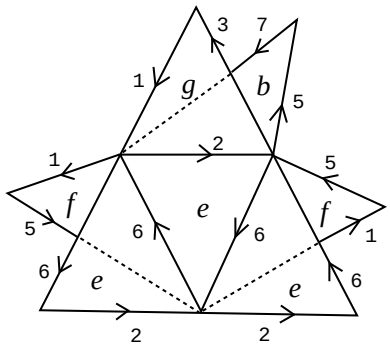
A'_3

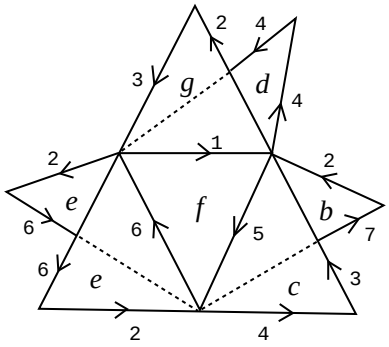

7 5
3 a b 2
2 7 2
b a g
5 7 3 1
3 a c 4
7 5

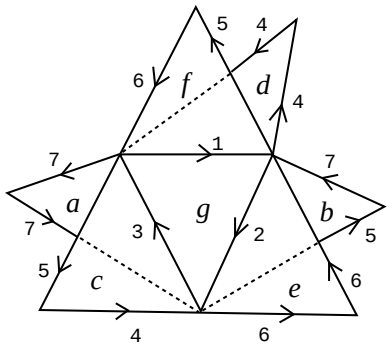

6 1
6 e g 3
3 2 3
a b c
7 7 5 4
7 a f 1
3 6


1 1
4 d d 4
6 4 2
f c g
1 5 3 1
7 b a 7
2 7

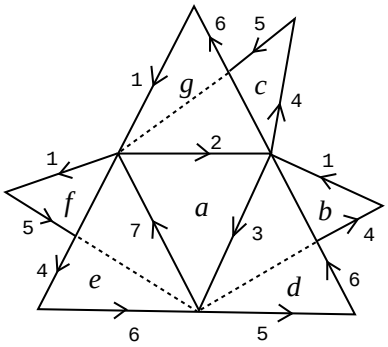

4 5
1 d c 3
3 4 3
c d g
5 4 1 2
1 d f 6
4 5

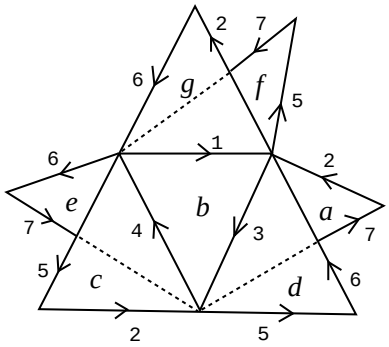

3 7
1 g b 5
1 2 5
f e f
5 6 6 1
6 e e 6
2 2

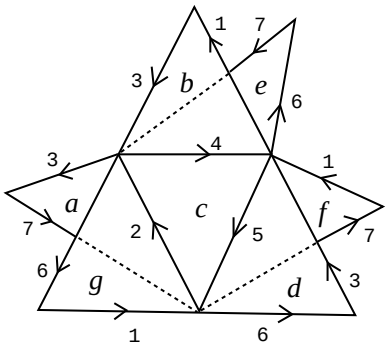

2 4
3 g d 4
2 1 2
e f b
6 6 5 7
6 e c 3
2 4

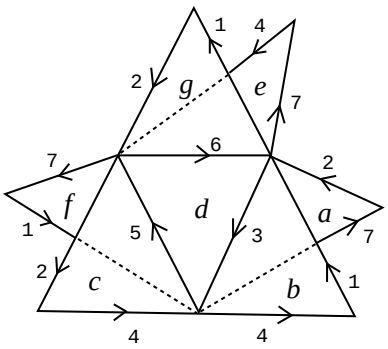

5 4
6 f d 4
7 1 7
a g b
7 3 2 5
5 c e 6
4 6

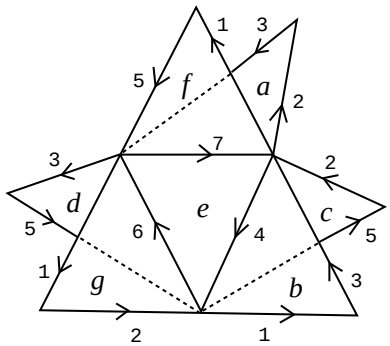
C_1

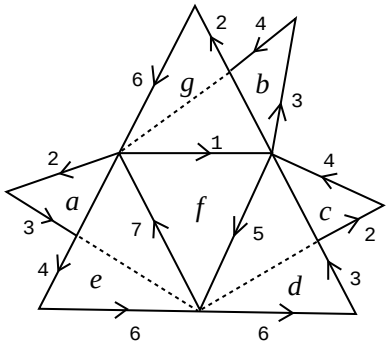

6 5
1 g c 4
1 2 1
f a b
5 7 3 4
4 e d 6
6 5

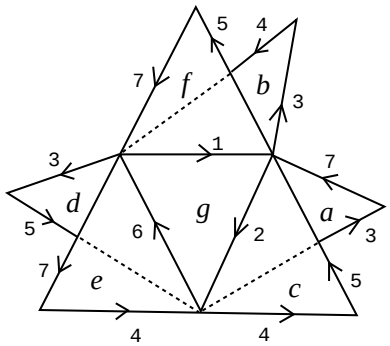

2 7
6 g f 5
6 1 2
e b a
7 4 3 7
5 c d 6
2 5


1 7
3 b e 6
3 4 1
a c f
7 2 5 7
6 g d 3
1 6

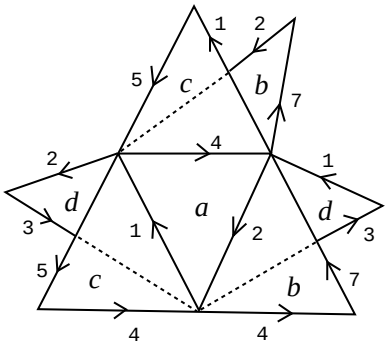

1 4
2 g e 7
7 6 2
f d a
1 5 3 7
2 c b 1
4 4

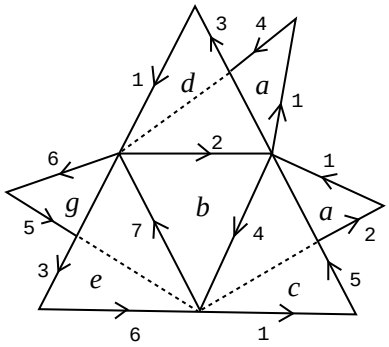

1 3
5 f a 2
3 7 2
d e c
5 6 4 5
1 g b 3
2 1

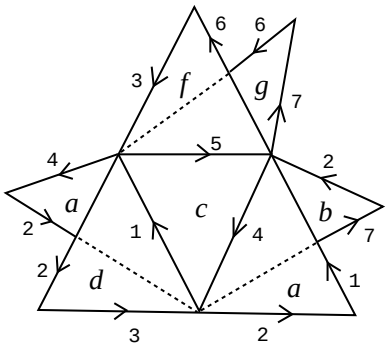

2 4
6 g b 3
2 1 4
a f c
3 7 5 2
4 e d 3
6 6

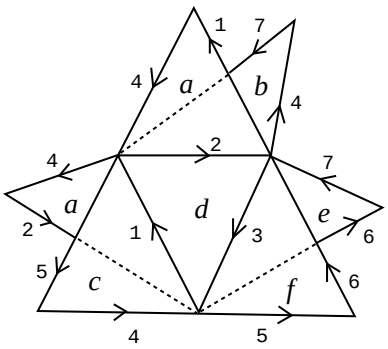

5 4
7 f b 3
3 1 7
d g a
5 6 2 3
7 e c 5
4 4

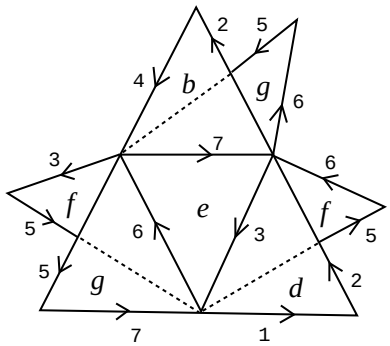
C_2

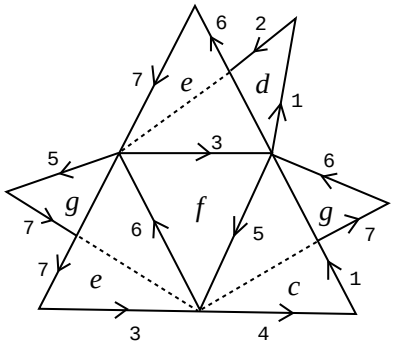

1 2
5 c b 7
2 4 1
d a d
3 1 2 3
5 c b 7
4 4

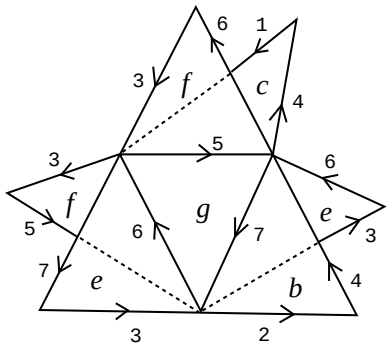

3 4
1 d a 1
6 2 1
g b a
5 7 4 2
3 e c 5
6 1


6 6
3 f g 7
4 5 2
a c b
2 1 4 7
2 d a 1
3 2

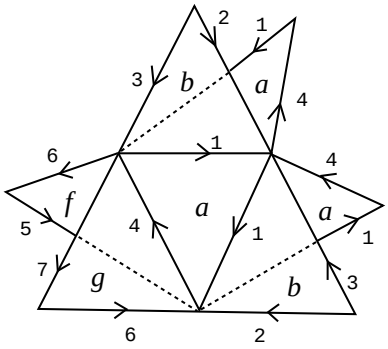

1 7
4 a b 4
4 2 7
a d e
2 1 3 6
5 c f 6
4 5

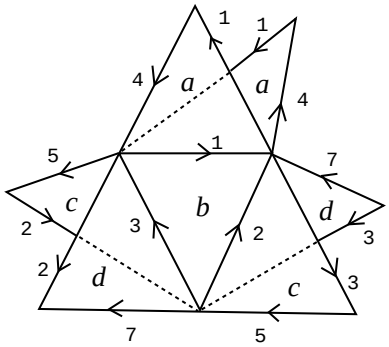

2 5
4 b g 6
3 7 6
f e f
5 6 3 5
5 g d 2
7 1

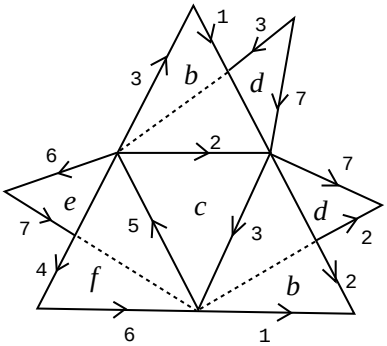

6 2
7 e d 1
5 3 6
g f g
7 6 5 7
7 e c 1
3 4

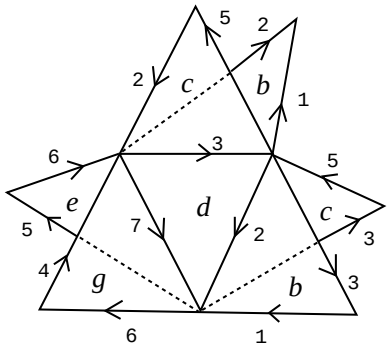

6 1
3 f c 4
3 5 6
f g e
5 6 7 3
7 e b 4
3 2

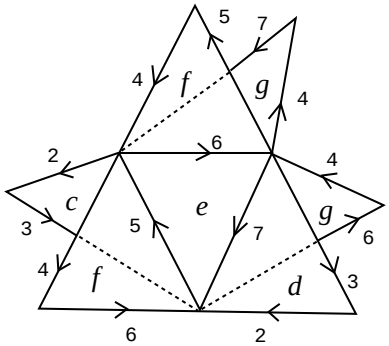
B_2

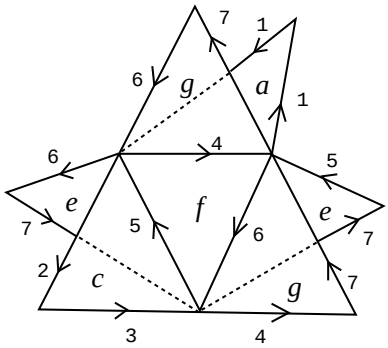

2 1
3 b a 4
6 1 4
f a a
5 4 1 1
7 g b 3
6 2

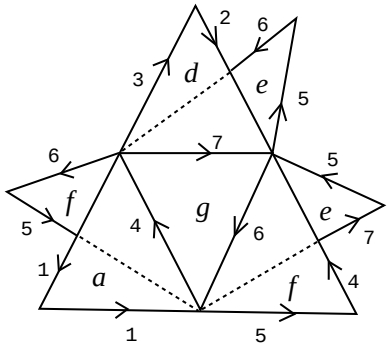

1 1
4 a a 4
5 1 7
c b d
2 3 2 3
2 d c 3
7 5


1 3
3 b d 7
6 2 7
e c d
7 5 3 2
4 f b 2
6 1

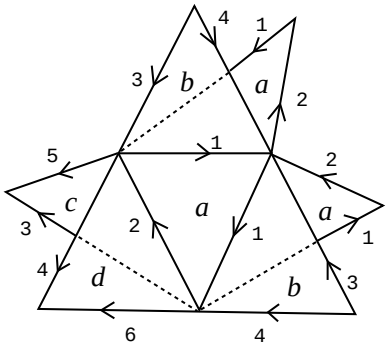

5 2
2 c b 1
6 3 5
e d c
5 7 2 3
4 g b 3
6 1

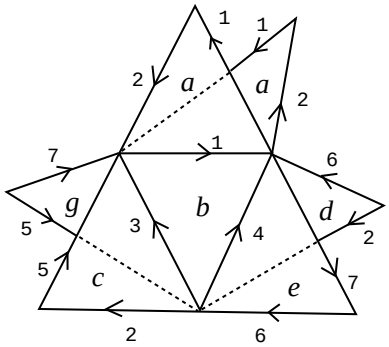

5 7
4 f g 4
2 6 4
c e g
3 5 7 6
4 f d 3
6 2

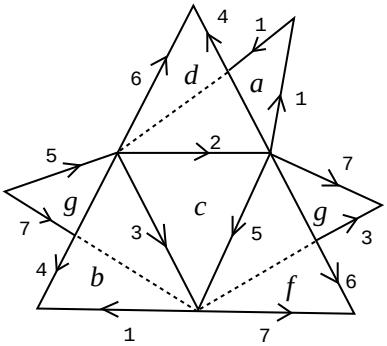

7 1
6 g a 1
6 4 5
e f e
7 5 6 7
2 c g 7
3 4

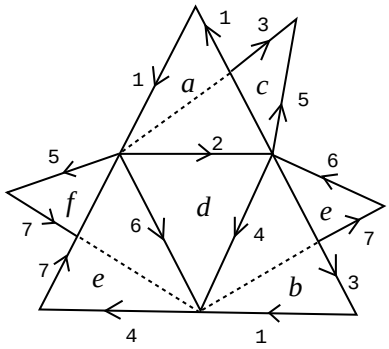

2 6
3 d e 5
6 7 5
f g e
5 4 6 7
1 a f 4
1 5

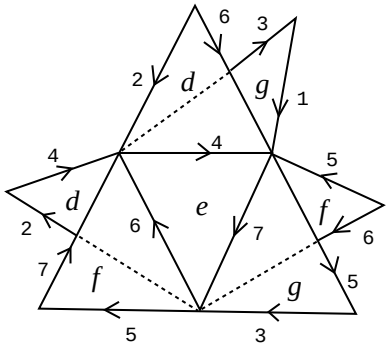
B_4

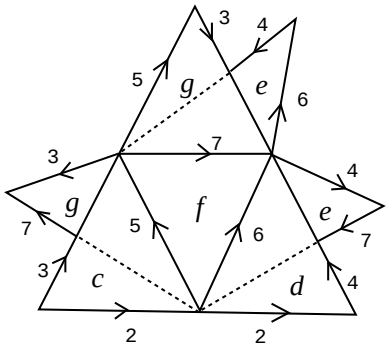

4 1 3 b a 2 5 1 2 c a a 3 2 1 1 4 d b 3 6 4

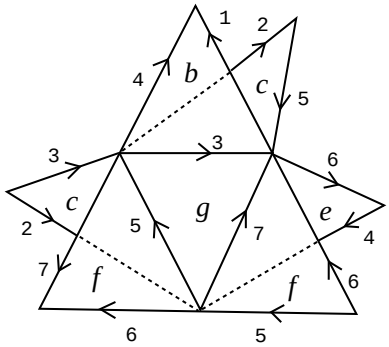

1 1 2 a a 2 7 1 6 g b d 5 3 4 2 5 c e 7 2 6


4 1 6 d a 1 5 2 7 g c g 7 3 5 3 4 b f 6 1 7


1 3 1 a c 5 5 2 6 f d e 7 6 4 7 7 e b 3 4 1

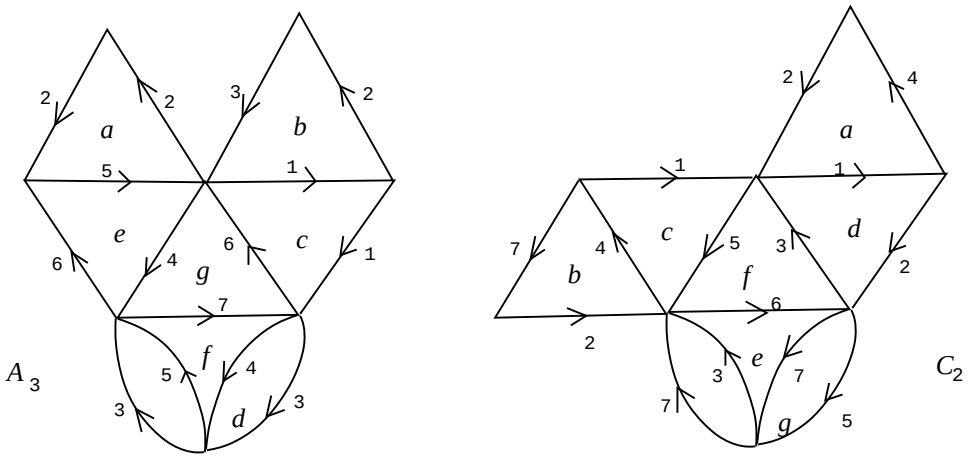

6 3 2 d g 1 4 4 5 d e f 2 6 7 6 7 f g 5 5 3


3 4 5 g e 6 3 7 4 g f e 7 5 6 7 3 c d 4 2 2


1 2 4 b c 5 3 3 6 c g e 2 5 7 4 7 f f 6 6 5

Annexe B

Présentations des groupes fondamentaux et calcul de leur abélianisé



Pour les polyèdres A_3 et C_2, on se base sur les figures ci-dessus, pour les cinq autres, on reprend celles de la figure 7. Nous allons calculer une présentation des groupes fondamentaux à partir de ces figures. Après quoi, nous calculerons les abélianisés. Pour les trois figures les plus ramassées (A_1, C_1, A'_3), les quatre générateurs du bord suffisent. Comme relations, nous prendrons les trois qui consistent à éliminer les générateurs non utilisés, et une autre faisant le tour de la face centrale. Pour les trois figures en forme de volant de plage (B_2, A_3 et C_2), on élimine, a priori, seulement le générateur commun à trois faces. Enfin, pour le dernier (B_4), cinq générateurs sont, a priori, nécessaires : on élimine les arêtes 2 et 5 comme dans les trois premiers exemples ; puis les tois autres relations sont données par les faces b, c et e. Voici nos calculs :

$$\pi_1(A_1) =< a_4, a_5, a_6, a_7 \mid a_4^2 = a_5a_6 \ , \ a_5a_7 = a_7a_6 \ , \ a_7a_5 = a_4a_6 \ , \ a_5^2a_6a_7a_6a_7 = 1 > .$$

D'où, en posant $a = a_4$ et $b = a_5$, la première et la troisième relations nous donnent :

$$a_6 = b^{-1}a^2 \quad , \quad a_7 = ab^{-1}a^2b^{-1}.$$

En reportant dans les deux autres relations on trouve :

$$bab^{-1}a^2b^{-1} = a(b^{-1}a^2b^{-2})a^2 \quad , \quad ba^3b^{-1}a^2b^{-2}a^3b^{-1}a^2b^{-1} = 1.$$

La seconde relation se simplifie en : $b^{-1}a^2b^{-2} = a^{-5}ba^{-3}$. Quand on utilise cette dernière relation dans la parenthèse de la première, on obtient notre formulation définitive :

$$\pi_1(A_1) =< a, b \mid b^{-1}a^2b^{-2} = a^{-5}ba^{-3} \ , \ a^{-4}ba^{-1} = bab^{-1}a^2b^{-1} > .$$

Pour l'abélianisé, les relations s'écrivent $(ab^{-1})^2 = a^6 = 1$, d'où :

$$H_1(A_1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

Passons au suivant.

$$\pi_1(A'_3) =< a_4, a_5, a_6, a_7 \mid a_4^2 = a_5a_6 \ , \ a_7^2 = a_5a_4 \ , \ a_6^2 = a_5a_7 \ , \ a_4^2a_7^2a_6^2 = 1 > .$$

Posons $a = a_6$ et $b = a_7$. La deuxième et la troisième relations nous donnent :

$$a_4 = ba^{-2}b^2 \quad , \quad a_5 = a^2b^{-1}.$$

En reportant cela dans les autres, on trouve :

$$ba^{-2}b^3a^{-2}b^2 = a^2b^{-1}a = a^{-2}b^{-2}.$$

En simplifiant et en écrivant différemment il vient alors :

$$\pi_1(A_3{}') =< a, b \mid b^2 = a^{-1}ba^{-4} \ , \ b^3a^{-2}b^4 = a^2b^{-1}a^{-2} > .$$

Les relations abélianisées s'écrivent $b = a^{-5}$ et $a^{42} = 1$. D'où :

$$H_1(A'_3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/42\mathbb{Z}.$$

Passons maintenant au dernier exemple le plus ramassé.

$$\pi_1(C_1) =< a_1, a_4, a_5, a_6 \mid a_4a_5 = a_6a_1 \ , \ a_4a_1 = a_5a_6 \ , \ a_4a_6 = a_1a_5 \ , \ a_1^2a_5^2a_6^2 = 1 > .$$

Posons $b = a_1$, $c = a_5$ et $a = a_6$. La première relation donne $a_4 = abc^{-1}$. On injecte cela dans les trois autres relations pour trouver finalement :

$$\pi_1(C_1) =< a, b, c \mid bc^{-1}b = a^{-1}ca \ , \ b^{-1}ab = ca^{-1}c \ , \ a^2b^2c^2 = 1 > .$$

Pour l'abélianisé, les relations s'écrivent : $(bc^{-1})^2 = (ba^{-1})^2 = a^6 = 1$. D'où

$$H_1(C_1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

Passons maintenant aux trois cas nécessitant, a priori six générateurs.

$$\pi_1(A_3) =< a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \mid a_6 = a_1^{-2} \ , \ a_1^{-1} = a_2 a_3 \ , \ a_5 = a_2^{-2} \ ,$$

$$a_5 a_4 a_6 = 1 \ , \ a_6 a_4 = a_4 a_5 = a_3^2 > .$$

Posons $a = a_2$ et $b = a_3$. Les quatres premières relations nous donnent :

$$a_6 = abab \ , \ a_1 = b^{-1}a^{-1} \ , \ a_5 = a^{-2} \ , \ a_4 = a^2 b^{-1} a^{-1} b^{-1} a^{-1}.$$

Ces relations reportées dans les deux dernières donnent :

$$baba^2(b^{-1}a^{-1}b^{-1}) = a(b^{-1}a^{-1}b^{-1})a^{-2} \ , \ b^{-1}a^{-1}b^{-1} = a^{-2}b^2a^3.$$

En utilisant la seconde relation dans les parenthèses, il vient finalement :

$$\pi_1(A_3) =< a, b \mid b^{-1}a^{-1}b^2 = ab^3a^2 \ , \ a^3ba = b^{-2}a^2b^{-1} > .$$

Les relations abélianisées donnent $a^4 = b^{-2}$, $b^{-4} = a^2$. La première dans la seconde donne $a^6 = 1$ et la première s'écrit alors $(ab^{-1})^2 = 1$. Finalement :

$$H_1(A_3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

L'exemple suivant demandera un peu moins de calculs.

$$\pi_1(C_2) =< a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_7 \mid a_2 a_4 a_7 = 1 \ , \ a_1 a_4 a_2 = 1 \ , \ a_1 a_2 a_3 = 1 \ ,$$

$$a_1 a_5 a_4 = 1 \ , \ a_3 a_5 = a_7 a_3 = a_5 a_7 > .$$

Posons $a = a_1$ et $b = a_2$. Il vient alors des quatre premières relations :

$$a_4 = a^{-1}b^{-1} \ , \ a_7 = bab^{-1} \ , \ a_5 = a^{-1}ba \ , \ a_3 = b^{-1}a^{-1}.$$

Ces relations portées dans les deux dernières nous donnent finalement :

$$\pi_1(C_2) =< a, b \mid ba^2b^2 = a^2b^2a \ , \ baba = ab^{-1}a^{-2}bab > .$$

Les relations abélianisées deviennent $b = a$ et $a^3 = 1$. Donc :

$$H_1(C_2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Passons maintenant au dernier exemple à six générateurs.

$$\pi_1(B_2) =< a_1, a_2, a_3, a_4, a_6, a_7 \mid a_1^2 a_4 = 1 \ , \ a_2 = a_3 a_1 \ , \ a_7 = a_3 a_2 \ ,$$

$$a_4 a_7 a_6 = 1 \ , \ a_6 a_7 = a_2 a_3 = a_4 a_6 > .$$

Posons $a = a_1$ et $b = a_2$. Les quatre premières relations nous donnent :

$$a_4 = a^{-2} \ , \ a_3 = ba^{-1} \ , \ a_7 = ba^{-1}b \ , \ a_6 = b^{-1}ab^{-1}a^2.$$

Ces relations reportées dans les deux dernières nous donnent :

$$b^{-1}ab^{-1}a^2(ba^{-1}b) = b^2a^{-1} = a^{-2}(b^{-1}ab^{-1})a^2.$$

La seconde égalité s'écrit $b^{-1}ab^{-1} = a^2b^2a^{-3}$. Quand on l'injecte dans la parenthèse de la première égalité, il vient finalement :

$$\pi_1(B_2) =< a, b \mid b^{-1}ab^{-1} = a^2b^2a^{-3} \ , \ a^2b^2a^2 = b^2ab^2 > .$$

Les relations abélianisées sont $b^4 = a^2$, $a^3 = b^2$. On en déduit de suite $a = b^{-2}$ et $b^8 = 1$. Finalement :

$$H_1(B_2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}.$$

Passons au dernier exemple.

$$\pi_1(B_4) =< a_1, a_3, a_4, a_6, a_7 \mid a_6a_7^{-1} = a_7a_3^{-1} \ , \ a_1^2 = a_4a_6^{-1} \ ,$$

$$a_3^2a_7^{-1}a_1^2 = 1 \ , \ a_3a_1 = a_4 \ , \ a_4a_7a_6 = 1 > .$$

Posons $a = a_1$ et $b = a_3$. Des deuxième, troisième et quatrième relations il vient

$$a_4 = ba \ , \ a_6 = a^{-2}ba \ , \ a_7 = a^2b^2.$$

Ces relations reportées dans les deux restantes nous donnent finalement :

$$\pi_1(B_4) =< a, b \mid bab^{-2} = a^4ba^2 \ , \ ba^3b^2 = a^{-1}b^{-1}a^2 > .$$

Les relations abélianisées deviennent : $b^2 = a^{-5}$ et $b^4 = a^{-2}$. On peut écrire cela $a = b^6$ et $b^{16} = 1$. Finalement :

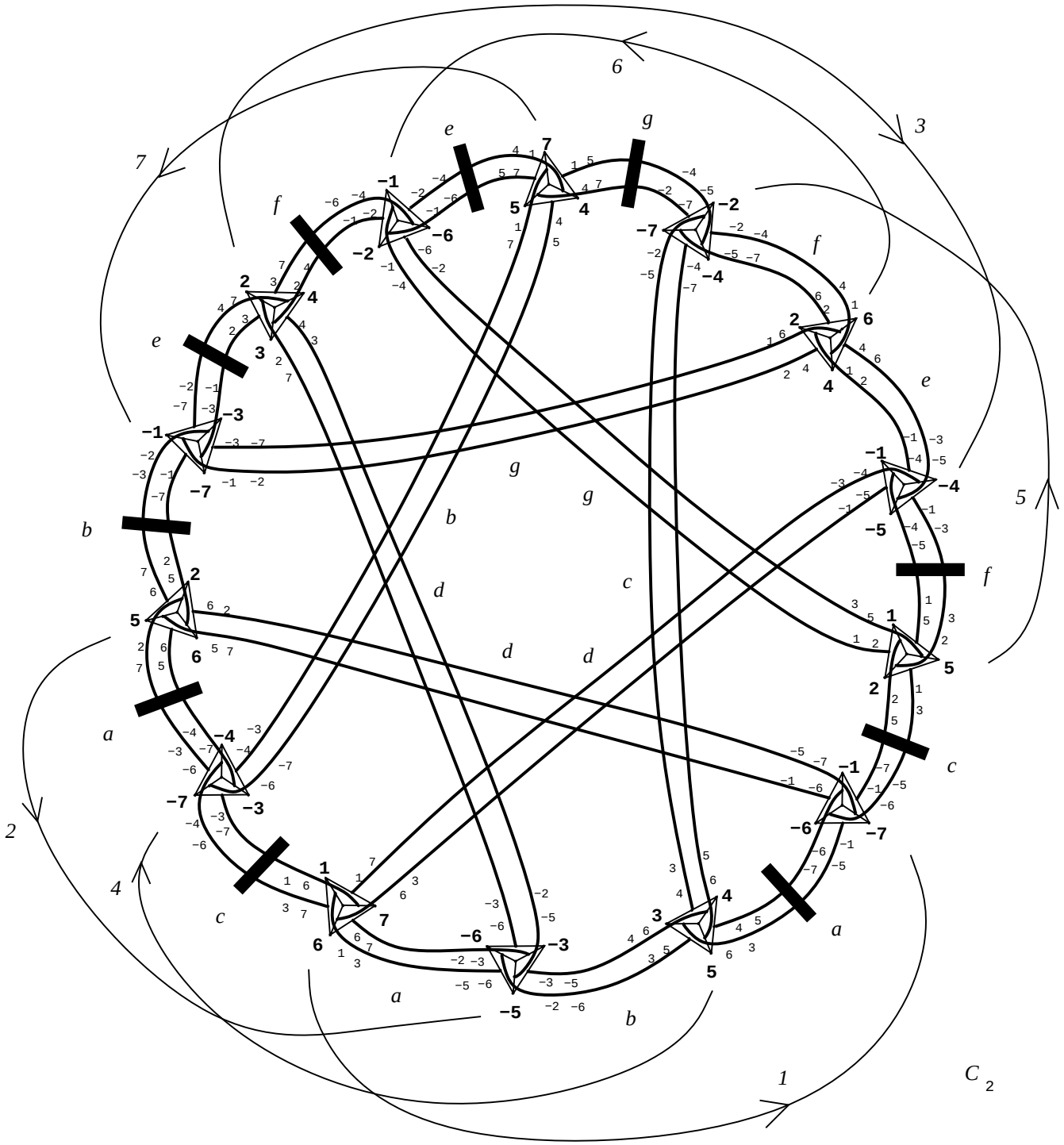
$$H_1(B_4, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}.$$

Annexe C

Calcul des links d'ordre 2

Dans cette annexe, pour chacun des sept polyèdres, on calcule le type de sphère de rayon deux. Pour cela, au-dessus de chacune des arêtes du link, nous plaçons deux arêtes de poisson en notant au bouts de chacune, les numéros des arêtes du polyèdre auxquelles elles correspondent (notées de 1 à 7 avec un signe suivant l'orientation). Bien sûr, pour faire cela, nous utilisons les développements des revêtements universels de l'annexe A.

Une fois ce premier travail terminé, il ne reste plus qu'à recoller les bouts des arêtes de poisson suivant leurs numéros pour former des shadoks. Alors, on compte le nombre de vrilles crées. Sur la figure, elles sont notées par un rectangle noir. S'il y en a un nombre pair, il s'agit du type 0 (celui de $SL_3(\mathbb{F}_2((t)))$ dans le cas des polyèdres orientables) ; s'il y en a un nombre impair, il s'agit du type 1, (celui de $SL_3(\mathbb{Q}_2)$ dans le cas des polyèdres orientables). Il faut moins d'une heure pour faire un calcul. Le dessin suivant illustre un de ces calculs. Pour associer aux deux immeubles classiques leur type de link, on peut faire ce petit calcul, en partant de la construction décrite dans l'introduction ; on peut aussi se référer aux travaux de [CMSZ].


1
2
3
4
5
6
7
a
b
c
d
e
f
g
C 2

Bibliographie

[A] E. Artin, *Algèbre géométrique*, Bordas, Paris, 1978.

[Ba] S. Barré, *Polyèdres finis de dimension 2 à courbure négative ou nulle et de rang 2*, Annales de l'Institut Fourier, T45, 1995.

[BB] W. Ballmann, M. Brin, *Orbihedra of nonpositive curvature*, Publications Mathématiques de l'IHES, **82**, 1995.

[Bro1] K.S. Brown, *Buildings*, Spinger-Verlag, New york 1989.

[Bro2] K.S. Brown, *Five lectures on buildings*, Congrès de Trieste 1990.

[BBE] W. Ballmann, M. Brin, P. Eberlein, *Structure of manifolds of nonpositive curvature, I*, Annals of Mathematics, 122 (1985), 171-203.

[BBS] W. Ballmann, M. Brin, R. Spatzier, *Structure of manifolds of nonpositive curvature, II*, Annals of Mathematics, 122 (1985), 205-235.

[BurS] K. Burns, S. Spatzier. *Manifolds of nonpositive curvature and their buildings*, Publications Mathématiques de l'IHES, $n^0 65$, 1987.

[BBuy] W. Ballmann, S. Buyalo, *Nonpositive Curved Metrics on 2-Polyedra*, Bonn, février 1994.

[BH] M. Bridson, A. Haefliger, livre en préparation.

[CMSZ] D.I. Cartwright, A.M. Mantero, T. Steger, A. Zappa, *Groups acting simply transitively on the vertices of a building of type $\widetilde{A}_2$ I; The cases $q = 2$ and $q = 3$, II* Geom. Dedicata 47 (1993), n° 2, 143-166-223.

[CMS] D.I. Cartwright, C. Mlotkowski, T. Steger, *Property (T) and $\widetilde{A}_2$ groups,* Ann. Inst. Fourier 44 (1994), n° 1, 213-248.

[E] D.B.A. Epstein, *Word Precessing in Groups*, Jones ans Bartlett Publishers ; Boston, London ; 1992.

[Ga] H. Garland, *p-adic curvature and the cohomologie of discret subgroups of p-adic groups,* Annals of Mathematics 97 (1973), 375-423.

[P] P. Pansu, *Formule de Matsushima, de Garland et propriété (T) pour des groupes agissant sur des espaces symétriques ou des immeubles*, Prépublication d'Orsay, 95-88.

[R] M. Ronan, *Lectures on Buildings,* Perspectives in Mathematics, Vol. 7, Academic Press 1989.

[RT] M.A. Ronan, J. Tits, *Building Buildings*, Math. Ann. 278, (1987) 291-306.

[S] J. Świątkowski, *Polygonal complexes of nonpositive curvature : from local symmetry to global one,* Wroclaw 1994, preprint.

[T1] J. Tits, *Spheres of Radius 2 in Triangle Buildings. I.* Finite geometies buildings and related Topics. Pingrie Park Conference, 1988.

[T2] J. Tits, *A local approach to Buildings*, The Geometric Vein (Coxeter Festschrift), 519-547. Berlin, Heidelberg, New York ; Springer 1981

[T3] J. Tits, *On buildings and their Applications*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians ; Vancouver, 1974.

[Z] A. Żuk, *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyèdres,* C.R. Acad. Sci. Paris, t. 323. Série I, 1996.

Sylvain Barré, École normale supérieure de Lyon, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07.

E-mail : sbarre@umpa.ens-lyon.fr