UNIVERSITÉ D'ANGERS

Année : 2002
N° d'ordre : 532

OPERATEURS DE MONGE-AMPERE SYMPLECTIQUES EN DIMENSIONS 3 et 4

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques

ÉCOLE DOCTORALE D'ANGERS

Présentée et soutenue publiquement

le 4 Novembre 2002
à l'université d'Angers
par Bertrand BANOS

Devant le jury ci-dessous :

Michèle Audin	Rapporteur	Université Louis Pasteur (Strasbourg)
Frédéric Helein	Rapporteur	Ecole Normale Supérieure de Cachan
Jean Jacques Loeb	Examinateur	Université d'Angers
Valentin V. Lychagin	Examinateur	Université de Tromsø (Norvège)

Directeur de thèse : Vladimir Roubtsov, Université d'Angers

Nom et coordonnées du laboratoire : U.M.R N° 6093 associée au CNRS
2 Bd Lavoisier, 49045 Angers cedex 01, France

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Volodya Roubtsov qui a bien voulu diriger mes recherches. Son impressionnante culture mathématique et ses nombreuses idées m'ont accompagné tout au long de ses trois années et m'ont permis d'avancer chaque jour un peu plus. Je le remercie vivement pour cela. Mais je ne le remercierai jamais assez pour sa gentillesse, sa disponibilité et sa grande générosité. Cette thèse fut grâce à lui, bien plus qu'un apprentissage des Mathématiques, une aventure humaine passionnante.

Je remercie tout aussi chaleureusement Michèle Audin pour toute l'aide qu'elle m'a apportée. Ses critiques, certes parfois sévères mais toujours justes, et ses encouragements m'ont fait mûrir. C'est un honneur pour moi qu'elle ait accepté d'être rapportrice de ma thèse.

Merci bien sûr à mon autre rapporteur Frédéric Helein pour sa gentillesse et ses conseils mais aussi pour les deux mémorables rencontres Physique-Mathématiques qu'il a organisé à Peyresq avec Joseph Kouneiher.

C'est également un grand honneur pour moi que Valentin Lychagin ait accepté d'être membre de mon jury. Je n'oublie pas qu'il est à l'origine de cette théorie des opérateurs de Monge-Ampère. Cette thèse n'existerait pas sans lui.

Je suis aussi très reconnaissant à Jean Jacques Loeb d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je voudrais aussi remercier Alexandre Vinogradov, Benjamin Enriquez et Ian Roultsone pour toutes leurs remarques et suggestions.

Cette thèse a été préparée au sein du Département de Mathématiques de l'Université d'Angers. Je remercie son directeur Jean Michel Granger pour son accueil et les moyens qu'il a mis à ma disposition.

J'ai une pensée particulière pour ma famille qui m'a soutenu et aidé tout au long de mes études. Je sais tout ce que je leur dois.

Et puis merci à vous mes amis, Céline, Goulwen, Oleg , Rouchdi, Bruno, Rémi, Manouche, Yohann, David, Yacoub, ... Comme ils disent nos supporters, nous ne marcherons plus jamais seul !

Table des matières

Notations

- ♦ $\mathbb{R}$ corps des réels
- ♦ $\mathbb{C}$ corps des complexes
- ♦ $\mathbb{H}$ corps des quaternions
- ♦ $\mathbb{O}$ algèbre des octonions
- ♦ $W \otimes \mathbb{C}$ complexifié de l'espace vectoriel réel W
- ♦ $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ base duale de la base $(e_1, \ldots, e_n)$
- ♦ $\Lambda^k(V^*)$ espace des k-formes $\mathbb{R}$-linéaires sur l'espace vectoriel réel V
- ♦ $\Lambda^k(V^*, \mathbb{C})$ espace des k-formes $\mathbb{C}$-linéaires sur l'espace vectoriel complexe V
- ♦ $\Omega^k(X)$ espace des k-formes différentielles réelles sur la variété lisse X
- ♦ $L_U\omega$ dérivée de Lie de la forme différentielle ω par le champ de vecteurs U
- ♦ $i_U(\omega) = \omega_U$ contraction de la forme ω par le champ de vecteurs U
- ♦ $\omega \wedge \omega'$ produit extérieur des formes ω et ω'
- ♦ ω^n n-ième puissance extérieure de la forme ω
- ♦ $\frac{\omega\wedge\omega'}{\theta}$ unique scalaire vérifiant $\omega \wedge \omega' = \frac{\omega\wedge\omega'}{\theta}\theta$.
- ♦ $F^*\omega$ pull-back de la forme ω par l'application F i.e. $F^*\omega(U, V) = \omega(F(U), F(V))$
- ♦ X_f champ hamiltonien d'hamiltonien f
- ♦ J^1M fibré des 1- jets de la variété lisse M
- ♦ TM fibré tangent de la variété lisse M
- ♦ T^*M fibré cotangent de la variété lisse M
- ♦ $T_xF : T_xM \to T_{F(x)}N$ application tangente en x de l'application $F : M \to N$
- ♦ $\mathrm{hess}(f)$ déterminant de la matrice hessienne de la fonction f
- ♦ $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$ Laplacien de la fonction f
- ♦ $\Box f = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ pseudo Laplacien de la fonction f (qui coïncide avec le d'Alembertien de f pour $n = 2, 3$)

Introduction

Formulation du problème

Une équation de Monge-Ampère[1] est une équation différentielle du second ordre dont la "non linéarité" est très spécifique : c'est celle du déterminant. En deux variables, une telle équation s'écrit par exemple

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2}+2B\frac{\partial^2 f}{\partial q_1\partial q_2}+C\frac{\partial^2 f}{\partial q_2^2}+D\big(\frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial q_2^2}-(\frac{\partial^2 f}{\partial q_1\partial q_2})^2\big)+E=0, \tag{1}$$

f étant une fonction réelle lisse définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et les coefficients A, B, C, D et E étant des fonctions lisses sur l'espace des jets $J^1\mathbb{R}^2$ (c'est à dire qu'ils sont fonction de $(q, f, \frac{\partial f}{\partial q})$). Plus généralement une EMA en n variables s'écrit comme une combinaison linéaire à coefficients sur $J^1\mathbb{R}^n$ des différents mineurs de la matrice hessienne $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial q_j}\right)$. Lorsque les coefficients d'une EMA sont en fait des fonctions sur le fibré cotangent $T^*\mathbb{R}^n\subset J^1\mathbb{R}^n$ (i.e. ne dépendent que de $(q, \frac{\partial f}{\partial q})$) on parle d'équation de Monge-Ampère symplectique[2].

De telles équations apparaissent souvent sous des formes diverses et variées en Physique Mathématique. Nous pouvons citer par exemple les équations de Chynoweth-Sewell issues du modèle "semi-géostrophique" de la dynamique de l'atmosphère ([**CS**])

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial q_2^2}-(\frac{\partial^2 f}{\partial q_1\partial q_2})^2+\frac{\partial^2 f}{\partial q_3^2}=\gamma,$$

ou encore les équations de Plebanski obtenues par réductions symétriques des équations de Yang-Mills autoduales ([**PP**]),

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 f}{\partial q_1\partial q_2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial q_3\partial q_4}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial q_1\partial q_4}\dfrac{\partial^2 f}{\partial q_2\partial q_3}=1, & \text{(Plebanski I)}\\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial q_1^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial q_3^2}-(\dfrac{\partial^2 f}{\partial q_1\partial q_3})^2+\dfrac{\partial^2 f}{\partial q_1\partial q_2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial q_3\partial q_4}=0 & \text{(Plebanski II).}\end{cases}$$

Dans un autre formalisme, une variété de Kähler (c'est une variété munie d'une métrique g et d'une structure complexe I telle que la forme de Kähler $\Omega=g(I.,.)$ est une forme symplectique) de dimension complexe n munie d'une forme volume

[1] nous noterons par la suite EMA
[2] nous noterons EMAS

holomorphe α est une variété de Calabi-Yau si

$$\Omega^n = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!}{2^n i^n} \alpha \wedge \overline{\alpha}. \tag{2}$$

Cette condition est une EMA satisfaite par le potentiel de Kähler K associé à la forme de Kähler $\Omega = i\partial\overline{\partial}K$. Yau a démontré (sous certaines conditions) l'existence de solutions pour cette équation dans son célèbre article [**Y**].

Une approche géométrique des EMA fut proposée dans les années 70 par Lychagin ([**L**]) à partir d'une idée de E. Cartan. Le principe est d'établir une correspondance entre les EMA en n variables et les n-formes différentielles sur l'espace des jets $J^1\mathbb{R}^n$: pour toute forme $\omega \in \Omega^n(J^1\mathbb{R}^n)$ on définit l'opérateur différentiel (appelé opérateur de Monge-Ampère) $\Delta_\omega : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ par

$$\Delta_\omega(f) = (j^1 f)^* \omega,$$

où $j^1 f : \mathbb{R}^n \to J^1\mathbb{R}^n$, $q \mapsto (q, f(q), \frac{\partial f}{\partial q}(q))$ est la section naturelle définie par la fonction f. L'EMA associée à cet opérateur est alors l'équation

$$\Delta_\omega = 0.$$

Par exemple l'équation (1) peut s'écrire $\Delta_\omega = 0$ avec

$$\begin{aligned} \omega = {} & A dp_1 \wedge dq_2 + B(dq_1 \wedge dp_1 - dq_2 \wedge dp_2) + C dq_1 \wedge dp_2 \\ & + D dp_1 \wedge dp_2 + E dq_1 \wedge dq_2 \end{aligned}$$

dans le système de coordonnées naturel (q_1, q_2, u, p_1, p_2) de $J^1\mathbb{R}^2$. Lychagin a montré qu'il y a en fait une correspondance biunivoque entre les équations de Monge-Ampère (symplectiques) et les opérateurs de Monge-Ampère (symplectiques) associés à certaines n-formes différentielles, les formes effectives, sur $J^1\mathbb{R}^n$ (ou $T^*\mathbb{R}^n$) : c'est le théorème de Hodge-Lepage-Lychagin.

Un problème classique de la théorie géométrique des équations différentielles est le problème d'équivalence locale : est-ce que deux équations différentielles données représentent la même équation modulo un changement de coordonnées locales ? La famille des équations de Monge-Ampère constitue une classe d'équations différentielles tout à fait naturel pour ce problème et plus particulièrement pour le problème de la linéarisation : quand une équation de Monge-Ampère donnée est-elle localement équivalente à une équation différentielle linéaire ? Le problème de la linéarisation des EMA en deux variables (par rapport au plus grand groupe de difféomorphismes locaux qui préservent cette catégorie d'équations, le groupe des difféomorphismes de contact) fut initialement posé par Sophus Lie en 1874 et il a été étudié dans les articles classiques de Darboux et Goursat puis dans de nombreux articles plus modernes. Aujourd'hui, il est bien connu que toute EMA à coefficients constants en deux variables est linéarisable et est équivalente à l'une des équations suivantes

$$\begin{cases} \Delta f = 0, & \text{(EMA elliptique)} \\ \Box f = 0, & \text{(EMA hyperbolique)} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial q_1^2} = 0, & \text{(EMA parabolique).} \end{cases} \tag{3}$$

Lychagin et Roubtsov ont montré de plus le théorème de Sophus Lie dans [**LR3**] dans le cas *analytique* : toute équation de Monge-Ampère symplectique sur une surface analytique est quasilinéarisable, c'est à dire qu'il existe un système de coordonnées dans lequel elle s'écrit

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2} + 2B\frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial q_2} + C\frac{\partial^2 f}{\partial q_2^2} + D = 0,$$

A, B, C et D dépendant de façon analytique de $(q, \frac{\partial f}{\partial q})$. Tunisky a généralisé ce résultat pour les équations de Monge-Ampère analytiques non symplectiques ([**T**]).

La motivation première de cette thèse est d'étudier ce problème d'équivalence locale des EMA en dimension 3. Plus précisément nous cherchons à déterminer des critères nécessaires et suffisants pour qu'une équation de Monge-Ampère (en trois variables) donnée soit localement équivalente à une équation à coefficients constants. Nous nous plaçons pour cela dans le contexte plus général de la théorie géométrique des invariants différentiels (voir [**AVL**], chapitre 7). De ce point de vue, on cherche à construire des *invariants différentiels* pour reconnaître des objets (des équations, des structures, ...) équivalents. Un invariant scalaire différentiel associé à une équation différentielle d'ordre k est à priori une fonction sur l'espace des jets J^k invariante par l'action des difféomorphismes de la base, mais l'approche de Lychagin et Roubtsov permet d'associer aux équations de Monge-Ampère des invariants d'ordre 1 en utilisant la structure de contact sur J^1 ou la structure symplectique sur T^*. En adoptant ce point de vue, nous sommes confrontés à plusieurs problèmes de la théorie des invariants géométriques, que l'on peut distinguer comme suit :

(1) classifier les équations de Monge-Ampère à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$, c'est étudier notamment les différentes orbites de l'action du groupe symplectique $Sp(n)$ sur l'espace des formes extérieures effectives $\Lambda^n_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$. Il y a par exemple trois familles d'orbites pour l'action de $Sp(2)$ sur $\Lambda^2_\varepsilon(\mathbb{R}^4)$

$$\begin{cases} \lambda(dq_1 \wedge dp_2 - dq_2 \wedge dp_1) & \lambda \neq 0 \\ \lambda(dq_1 \wedge dp_2 + dq_2 \wedge dp_1) & \lambda \neq 0 \\ dq_1 \wedge dp_2, \end{cases}$$

et ces trois familles d'orbites correspondent exactement aux trois équations de Monge-Ampère à coefficients constants sur $\mathbb{R}^2$. Nous donnons dans cette thèse une liste de toutes les orbites de l'action de $Sp(3)$ sur $\Lambda^3_\varepsilon(\mathbb{R}^6)$.

(2) classifier des familles d'équations différentielles c'est aussi construire des invariants caractéristiques qui permettent de distinguer différentes classes d'équations. Par exemple, le pfaffien pf : $\Omega^2(T^*\mathbb{R}^2) \to C^\infty(T^*\mathbb{R}^2)$ défini par

$$\mathrm{pf}(\omega) = \frac{\omega \wedge \omega}{\Omega \wedge \Omega}$$

est un invariant scalaire différentiel des équations de Monge-Ampère en dimension 2. D'abord parce qu'il caractérise les différentes familles d'orbites de l'action de $Sp(2)$ sur $\Lambda^2_\varepsilon(\mathbb{R}^4)$ (deux formes effectives sont dans la même orbite si et seulement si elles ont même pfaffien) ensuite parce qu'il caractérise plus généralement certaines familles d'EMAS. Lychagin et Roubtsov ont en effet montré dans [**LR1**] qu'une équation de Monge-Ampère $\Delta_\omega = 0$ associée à une forme différentielle effective $\omega \in \Omega^2_\varepsilon(\mathbb{R}^4)$ non dégénérée (i.e. $\mathrm{pf}(\omega) \neq 0$) est localement équivalente à l'une des deux équations

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \\ \Box f = 0 \end{cases}$$

si et seulement si

$$d\frac{\omega}{\sqrt{|\operatorname{pf}(\omega)|}} = 0.$$

Nous montrons ici pourquoi le “pfaffien de Hitchin” est un invariant scalaire différentiel analogue en dimension 3.

(3) plus généralement, classifier c’est associer des structures géométriques caractéristiques. En dimension 2 par exemple, Lychagin et Roubtsov associent à chaque EMAS $\Delta_\omega = 0$ non dégénérée une structure presque complexe (si $\operatorname{pf}(\omega) > 0$) ou une structure presque produit (si $\operatorname{pf}(\omega) < 0$) sur $T^*\mathbb{R}^2$. Deux EMAS non dégénérées sont équivalentes si et seulement si ces structures géométriques associées sont équivalentes. Cette correspondance entre EMAS et structures presque complexe ou presque produit va en fait au delà du problème de classification et elle permet en particulier de mieux comprendre la géométrie “locale” de l’espace que décrivent ces équations. Par exemple la structure presque complexe associée à une EMAS non dégénérée elliptique $\Delta_\omega = 0$ est localement intégrable si et seulement si cette EMAS est localement équivalente à l’équation

$$\Delta f = 0.$$

Nous construisons pour la dimension 3 des structures géométriques analogues (que nous appelons “structures de Calabi-Yau généralisées”).

L’approche géométrique de Lychagin permet cependant d’avoir une vision plus globale de la notion d’équation différentielle. L’idée que nous soutenons dans cette thèse est qu’une équation différentielle est l’expression locale d’une certaine structure géométrique sur une variété. Plus précisément, nous définissons une structure de Monge-Ampère symplectique sur une variété lisse X de dimension $2n$ comme la donnée d’un couple de formes différentielles

$$(\Omega, \omega) \in \Omega^2(X) \times \Omega^n(X)$$

satisfaisant les conditions suivantes

(i) Ω est une forme symplectique sur X c’est à dire qu’elle est non dégénérée et fermée

(ii) ω est Ω-effective i.e. $\Omega \wedge \omega = 0$.

Une sous-variété L de X est dite “calibrée” par cette structure (Ω, ω) si c’est une sous-variété lagrangienne de (X, Ω) et si ω s’annule sur L. Cette notion est en un certain sens une globalisation de la notion de solution d’une équation différentielle. En effet d’après le théorème de Darboux, le triplet (X, Ω, ω) s’identifie localement au triplet $(T^*\mathbb{R}^n, \Omega_0, \omega_0)$, Ω_0 étant la forme symplectique canonique sur $T^*\mathbb{R}^n$ et $\omega_0 \in \Omega^n(T^*\mathbb{R}^n)$ étant une forme différentielle Ω_0-effective. Une sous-variété calibrée par cette structure qui localement se projette difféomorphiquement sur $\mathbb{R}^n$ s’écrit alors localement comme le graphe d’une section $df : \mathbb{R}^n \to T^*\mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ étant une solution de l’équation de Monge-Ampère $\Delta_{\omega_0} = 0$.

Gromov a le premier remarqué une certaine analogie entre la théorie des structures de Monge-Ampère en géométrie symplectique et la théorie des calibrations en géométrie riemannienne, théorie qui a été développée par Harvey et Lawson dans les années 80 ([**HL**]) pour construire des exemples de variétés minimales. Rappelons qu'une p-calibration sur une variété riemannienne (X, g) est une p-forme différentielle fermée $\phi \in \Omega^p(X)$ telle que pour toute famille orthonormée $(e_1, \ldots, e_p)$ de T_xX,

$$|\phi_x(e_1, \ldots, e_p)| \leq 1.$$

Une sous-variété orientée L de dimension p est dite ϕ-calibrée si $\phi_x(\theta_{L,x}) = 1$ pour tout $x \in L$, θ_L étant la forme volume sur L définie par l'orientation de L et la métrique g. Les sous-variétés calibrées sont alors de volume minimal dans leur classe d'homologie. Par exemple la forme $\frac{\Omega^p}{p!}$ avec

$$\Omega = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\overline{z_j},$$

est une $2p$-calibration sur $\mathbb{C}^n$, appelée calibration de Kähler et les sous-variétés de $\mathbb{C}^n$ calibrées par cette calibration sont les sous-variétés complexes de dimension complexe p. Un autre exemple fameux de calibration est la calibration lagrangienne spéciale. Cette calibration est définie sur toute variété de Calabi-Yau comme la partie réelle $\mathrm{Re}(\alpha)$ de la forme volume holomorphe α vérifiant (2) et les sous-variétés $\mathrm{Re}(\alpha)$-calibrées sont dites lagrangiennes spéciales. Nous avons pu assister ces dernières années à un net regain d'intérêt pour ces sous-variétés calibrées. Elles semblent jouer en effet un rôle prépondérant en théorie miroir et en théorie des cordes. Strominger, Yau et Zaslow ont notamment proposé la construction du partenaire miroir d'une variété de Calabi-Yau en dimension complexe 3 en supposant l'existence d'une fibration torique lagrangienne spéciale ([**SYZ**]). Ces sous-variétés ont aussi des propriétés remarquables en théorie des déformations, McLean a par exemple montré que l'espace des modules d'une sous-variété lagrangienne spéciale compacte L est une variété lisse de dimension finie $b_1(L)$ ([**McL**]) et Hitchin a montré que cet espace des modules pouvait lui même être vu comme une sous-variété lagrangienne spéciale de $H^1(L) \times H^{n-1}(L)$ ([**Hi1**]). Ces sous-variétés lagrangiennes spéciales restent cependant des objets géométriques très mystérieux. Il en existe certainement beaucoup parce qu'elles sont l'analogue symplectique des sous-variétés complexes et qu'il doit exister une “dualité” entre structures complexes et structures symplectiques mais nous n'en connaissons que très peu :

(i) les sous-variétés complexes d'une variété hyperkähler

(ii) les points fixes d'une structure réelle sur une variété de Calabi-Yau

(iii) quelques exemples explicites pour des variétés de Calabi-Yau non compactes dûs notamment à Harvey et Lawson puis généralisés par Bryant et Joyce.

Ce qui est remarquable cependant de notre point de vue, c'est que les sous-variétés lagrangiennes spéciales se trouvent à l'intersection de la théorie des calibrations et de la théorie des structures de Monge-Ampère. Harvey et Lawson ont en effet montré que ces sous-variétés sont exactement les sous-variétés calibrées par la structure de Monge-Ampère $(\Omega, \mathrm{Im}(\alpha))$ sur notre variété de Calabi-Yau. Sur $\mathbb{C}^3$ par exemple, l'équation de Monge-Ampère associée à cette structure est

$$\Delta f - \mathrm{hess}(f) = 0.$$

De nombreux résultats ont déjà été obtenus dans l'étude géométrique des équations de Monge-Ampère, notamment par Lychagin et Roubtsov et cette thèse est, pour une grande part, un prolongement de leur travail. Cependant, le point de vue que nous adoptons est différent et c'est ce qui constitue l'originalité de cette thèse et, peut être, sa raison d'être. Nous voulons en effet montrer ici que le problème d'équivalence locale des équations de Monge-Ampère est l'expression locale du problème d'équivalence de certaines structures géométriques, qui, en dimension 3, sont de type Calabi-Yau. En un sens, il n'y a qu'une seule équation de Monge-Ampère : ce sont les solutions qui sont différentes parce qu'elles vivent dans des espaces (topologiquement et géométriquement) différents.

Résumé des principaux résultats

Cette thèse est divisée en deux parties. Dans la première nous expliquons la correspondance de Lychagin entre opérateurs de Monge-Ampère et formes effectives et nous étudions la géométrie des formes effectives en dimension 3 et 4. Dans la seconde nous donnons trois applications géométriques de cette étude :

(1) un critère d'équivalence locale d'équations de Monge-Ampère en dimension 3
(2) une interprétation géométrique de ce critère en termes d'intégrabilité et de courbure de la *structure de Calabi-Yau généralisée* associée à chaque équation de Monge-Ampère en dimension 3
(3) l'étude de la grassmannienne associée à une équation de Monge-Ampère en dimension 3 et 4

Première partie : Opérateurs de Monge-Ampère et formes effectives.

Chapitre 1 : Le théorème de Hodge-Lepage-Lychagin.
Le but de ce chapitre est de présenter la théorie géométrique des opérateurs de Monge-Ampère. Tous les résultats présentés sont connus, mais l'auteur s'est attaché à en donner des démonstrations simples et dans l'esprit des résultats qui suivront.

Soit (V,Ω) un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$. Soit $\Gamma : V \to V^*$ l'isomorphisme induit par Ω et $X_\Omega \in \Lambda^2(V^*)$ l'unique bivecteur tel que $\Gamma^*(X_\Omega) = \Omega$, $\Gamma^* : \Lambda^*(V) \to \Lambda^*(V^*)$ étant la puissance extérieure de Γ.

Suivant les notations de [**L**], nous introduisons les opérateurs

$$\begin{cases} \bot : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k-2}(V^*), & \omega \mapsto i_{X_\Omega}(\omega) \\ \top : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k+2}(V^*), & \omega \mapsto \omega \wedge \Omega. \end{cases}$$

Ces opérateurs ont les propriétés suivantes

$$\begin{cases} [\bot, \top](\omega) = (n-k)\omega, \ \forall \omega \in \Lambda^k(V^*) \\ \bot : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k-2}(V^*) \text{ est injective pour } k \geq n+1 \\ \top : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k+2}(V^*) \text{ est injective pour } k \leq n-1. \end{cases}$$

Une k-forme ω est dite effective si $\bot\omega = 0$ et l'espace des k-formes effectives est noté $\Lambda^k_\varepsilon(V^*)$. Si $k = n$, ω est effective si et seulement si $\omega \wedge \Omega = 0$.

Le théorème suivant explique le rôle fondamental joué par les formes effectives dans la théorie des opérateurs de Monge-Ampère ([**L**]) :

THEOREME (Hodge-Lepage-Lychagin). *(1) Toute forme $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ se décompose de façon unique en une somme finie*

$$\Omega = \omega_0 + \top\omega_1 + \top^2\omega_2 + \cdots ,$$

les formes ω_i étant toutes effectives.

(2) *Si deux k-formes effectives s'annulent sur les même sous-espaces isotropes de dimensions k de (V, Ω) alors elles sont proportionnelles.*

Ce théorème, basé sur la théorie des représentations de $sl(2, \mathbb{C})$, est l'analogue symplectique du théorème de Hodge classique sur une variété de Kähler (voir [**GH**] par exemple).

Soit maintenant M^n une variété lisse de dimension n. Notons J^1M le fibré des 1-jets des fonctions lisses sur M et notons $j^1(f) : M \to J^1M$, $x \mapsto [f]^1_x$ la section naturelle associée à une fonction lisse f. L'opérateur de Monge-Ampère $\Delta_\omega : C^\infty(M) \to \Omega^n(M)$ associé à une forme $\omega \in \Omega^n(J^1M)$ est défini par

$$\Delta_\omega(f) = j^1(f)^*(\omega).$$

Une solution généralisée de l'équation de Monge-Ampère $\Delta_\omega = 0$ est une sous-variété legendrienne L^n de J^1M (muni de sa structure de contact canonique U) sur laquelle s'annule ω. Soit C la distribution de contact qui à tout point x associe le noyau de la forme de contact U_x. Pour tout point x, $(C(x), dU_x)$ est un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$ isomorphe à $(T_{\beta(x)}T^*M, \Omega_x)$ via la projection

$$J^1M \xrightarrow{\beta} T^*M.$$

De plus, si L est une sous-variété legendrienne alors T_xL est un sous-espace lagrangien de $(C(x), dU_x)$.

Soit $\Omega^*(C^*)$ l'espace des formes s'annulant le long du champ de Reeb X_1. En tout point x, $(\Omega^*(C^*))_x$ s'identifie naturellement avec $\Omega^*(C(x)^*)$. Soit alors $\Omega^*_\varepsilon(C^*)$ l'espace des formes effectives sur $(C(x), dU_x)$ en tout point x de J^1M. D'après la première partie du théorème de Hodge-Lepage-Lychagin, on a

PROPOSITION.

$$\Omega^*_\varepsilon(C^*) = \Omega^*(J^1M)/I_C,$$

I_C étant l'idéal de Cartan engendré par U et dU.

La seconde partie de ce théorème dit que si deux formes différentielles ω et θ sur J^1M déterminent le même opérateur de Monge-Ampère alors $\omega - \theta \in I_C$.

Nous nous intéressons en fait dans cette thèse à une classe plus restrictive d'opérateurs, celles des opérateurs symplectiques, i.e. la classe des opérateurs qui vérifient

$$X_1(\Delta_\omega) = \Delta_{L_{X_1}(\omega)} = 0.$$

Ces opérateurs symplectiques sont entièrement décrits par l'ensemble des n-formes différentielles effectives sur T^*M.

Nous donnons également dans ce chapitre une version complexe des opérateurs de Monge-Ampère. Nous partons d'une variété complexe M de dimension complexe n. Le cotangent réel T^*M est muni naturellement d'une structure complexe et d'une forme symplectique complexe $\Omega_1 + i\Omega_2$. Soit $\omega \in \Omega^{2n}(T^*M)$ une forme réelle sur T^*M. Une solution pluriharmonique généralisée de l'équation de Monge-Ampère $\Delta_\omega = 0$ est une sous-variété de T^*M lagrangienne pour Ω_1 et Ω_2 et telle que $\omega|_L = 0$. Cette définition est motivée par l'exemple des variétés kählériennes spéciales qui sont comme l'a montré Hitchin ([**Hi2**]) des solutions pluriharmoniques de l'inéquation

$$\mathrm{hess}(f) \neq 0.$$

Chapitre 2 : Géométrie des formes effectives.

Nous étudions dans ce chapitre l'action du groupe symplectique $Sp(3)$ sur l'espace des formes effectives $\Lambda^3_\varepsilon(\mathbb{R}^6)$.

Nous commençons par dresser une liste exhaustive de toutes les orbites en utilisant l'invariant de Lychagin-Roubtsov $q_\omega \in S^2(\mathbb{R}^6)$ associé à une 3-forme effective ω. Cet invariant est défini par

$$q_\omega(X,Y) = -\frac{1}{4}\perp^2\Big(i_X\omega \wedge i_Y\omega\Big),$$

et mesure en fait les racines du polynôme caractéristique de ω :

$$\frac{(i_X\omega - \xi)^3}{\Omega^3} = -\xi(\xi - \sqrt{q_\omega(X)})(\xi + \sqrt{q_\omega(X)}).$$

La signature de cet invariant est caractéristique des orbites :

THEOREME. *Toute 3-forme effective sur $\mathbb{R}^6$ est dans une et une seule des orbites décrites dans le tableau 1.*

	ω	q_ω	$\varepsilon(q_\omega)$
1	$e_1^*\wedge e_2^*\wedge e_3^* + \gamma f_1^*\wedge f_2^*\wedge f_3^*, \gamma \neq 0$	$\frac{\gamma}{2}(e_1^*f_1^* + e_2^*f_2^* + e_3^*f_3^*)$	$(3,3)$
2	$f_1^*\wedge e_2^*\wedge e_3^* - f_2^*\wedge e_1^*\wedge e_3^*$ $+f_3^*\wedge e_1^*\wedge e_2^* - \nu^2 f_1^*\wedge f_2^*\wedge f_3^*, \nu\neq 0$	$-(e_1^*)^2-(e_2^*)^2-(e_3^*)^2$ $+\nu^2(-(f_1^*)^2-(f_2^*)^2-(f_3^*)^2)$	$(0,6)$
3	$f_1^*\wedge e_2^*\wedge e_3^* + f_2^*\wedge e_1^*\wedge e_3^*$ $+f_3^*\wedge e_1^*\wedge e_2^* + \nu^2 f_1^*\wedge f_2^*\wedge f_3^*, \nu\neq 0$	$(e_1^*)^2-(e_2^*)^2+(e_3^*)^2$ $+\nu^2((f_1^*)^2-(f_2^*)^2+(f_3^*)^2)$	$(4,2)$
4	$f_1^*\wedge e_2^*\wedge e_3^* - f_2^*\wedge e_1^*\wedge e_3^* + f_3^*\wedge e_1^*\wedge e_2^*$	$-(e_1^*)^2-(e_2^*)^2-(e_3^*)^2$	$(0,3)$
5	$f_1^*\wedge e_2^*\wedge e_3^* + f_2^*\wedge e_1^*\wedge e_3^* + f_3^*\wedge e_1^*\wedge e_2^*$	$(e_1^*)^2-(e_2^*)^2+(e_3^*)^2$	$(2,1)$
6	$f_3^*\wedge e_1^*\wedge e_2^* + f_2^*\wedge e_1^*\wedge e_3^*$	$(e_1^*)^2$	$(1,0)$
7	$f_3^*\wedge e_1^*\wedge e_2^* - f_2^*\wedge e_1^*\wedge e_3^*$	$-(e_1^*)^2$	$(0,1)$
8	$f_1^*\wedge e_2^*\wedge e_3^*$	0	$(0,0)$
9	0	0	$(0,0)$

TAB. 1. Classification des 3-formes effectives en dimension 6

Nous calculons ensuite les stabilisateurs et leur prolongation des trois orbites les plus intéressantes du point de vue des équations de Monge-Ampère. Ces calculs sont résumés dans le tableau 2.

$\Delta_\omega = 0$	$\mathcal{G}_\omega$	$\mathcal{G}_\omega^{(1)}$
$\mathrm{hess}(f) = 1$	$sl(3,\mathbb{R})$	0
$\Delta f - \mathrm{hess}(f) = 0$	$su(3)$	0
$\Box f + \mathrm{hess}(f) = 0$	$su(2,1)$	0

TAB. 2. Stabilisateurs des 3-formes effectives non dégénérées et leur prolongation

Nous adoptons ensuite un point de vue plus global en utilisant l'approche de Hitchin de la géométrie des 3-formes en dimension 6. Soit (V,Ω) un espace vectoriel symplectique de dimension 6. Soit la forme volume $\theta = -\frac{\Omega^3}{3!}$. Notons Θ la forme symplectique sur $\Lambda^3(V^*)$ induite par le produit extérieur :

$$\Theta(\omega,\omega') = \frac{\omega\wedge\omega'}{\theta}.$$

Notons enfin $A : \Lambda^5(V^*) \to \Lambda^6(V^*) \otimes V$ l'isomorphisme induit par le produit extérieur. L'invariant de Hitchin K_ω associé à une 3-forme ω sur V est défini par

$$K_\omega(X) = \frac{A(i_X(\omega) \wedge \omega)}{\theta}$$

et le pfaffien de Hitchin est

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{6}\operatorname{Tr}(K_\omega^2).$$

ω est dite non dégénérée si $\lambda(\omega) \neq 0$.

Nous montrons tout d'abord que l'invariant de Hitchin et celui de Lychagin-Roubtsov coïncident :

PROPOSITION. *Soit $\omega \in \Lambda^3_\varepsilon(\mathbb{R}^6)$ et X et $Y \in \mathbb{R}^6$:*

$$q_\omega(X, Y) = \Omega(K_\omega X, Y).$$

Adaptant alors les résultats de Hitchin pour les formes effectives nous en déduisons la

PROPOSITION. *$\Lambda^3_\varepsilon(\mathbb{R}^6)$ est un sous-espace symplectique de $(\Lambda^3(\mathbb{R}^6), \Theta)$ et l'action du groupe symplectique $Sp(3)$ est hamiltonienne d'application moment*

$$\begin{aligned} q : \Lambda^3_\varepsilon(\mathbb{R}^6) &\to S^2(\mathbb{R}^6) \\ \omega &\mapsto q_\omega. \end{aligned}$$

Nous étudions dans une troisième partie quelques propriétés des formes "bieffectives". Nous montrons notamment un analogue complexe du théorème de Hodge-Lepage-Lychagin :

THEOREME. *Soit V un espace vectoriel complexe de dimension complexe $2n$ et muni d'une forme symplectique complexe $\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2$. Toute forme réelle $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ s'écrit comme une somme finie*

$$\omega = \sum_{i,j} \omega_{i,j} \wedge \Omega_1^i \wedge \Omega_2^j,$$

les formes $\omega_{i,j}$ étant bieffectives, c'est à dire effectives pour Ω_1 et Ω_2.

De plus, lorsque $k = 2n$ la forme $\omega_{0,0}$ est uniquement déterminée et s'appelle la partie bieffective de ω.

Ce théorème établit une correspondance entre formes bieffectives et l'analogue complexe des opérateurs de Monge-Ampère : les opérateurs pluriharmoniques.

Deuxième partie : Applications géométriques.

Chapitre 3 : Equivalence locale des équations de Monge-Ampère.

Nous montrons dans ce chapitre un critère d'équivalence locale en utilisant des techniques d'intégrabilité formelle. Nous nous attardons assez longuement sur la démonstration de ce résultat (bien que dans la pratique il soit difficile à utiliser) parce que d'une part il complète et simplifie un résultat obtenu par Lychagin et Roubtsov et d'autre part parce que la démonstration fait intervenir des techniques très puissantes de la théorie géométrique des équations différentielles.

THEOREME. *Soit* $\Delta_\omega = 0$ *une équation de Monge-Ampère non dégénérée en dimension* 3 *associée à une forme effective* ω. *Si pour tout* $q \in \mathbb{R}^3$ *la forme* $[\omega]_q^2 = \omega^0 + \omega^1 + \omega^2$ *satisfait les relations*

$$\begin{cases} \omega^1 = L_{X_h}\omega^0 \\ \omega^2 = \dfrac{1}{2}(L_{X_h}\omega^1 + L_{X_k}\omega^0) \end{cases}$$

avec $h \in S^3(\mathbb{R}^6)$ *et* $k \in S^4(\mathbb{R}^6)$ *alors cette équation différentielle est symplectiquement équivalente à une et une seule des équations de Monge-Ampère*

$$\begin{cases} \mathrm{hess}(f) - 1 = 0 \\ \Delta f - \mathrm{hess}(f) = 0 \\ \Box f + \mathrm{hess}(f) = 0. \end{cases}$$

Chapitre 4 : Structures de Monge-Ampère.

Nous associons dans ce chapitre une "structure de Calabi-Yau généralisée" à une structure de Monge-Ampère non dégénérée sur une variété de dimension 6. Cette structure est essentiellement constituée

(i) d'une (pseudo) métrique q_ω

(ii) d'une forme symplectique Ω

(iii) d'une structure presque complexe ou presque produit K_ω compatible avec q_ω et Ω

(iv) de deux formes décomposables (réelles ou complexes) α et $\beta \in \Omega^3(X)$ dont les distributions associées sont les distributions des vecteurs propres de K_ω.

Nous étudions l'intégrabilité d'une telle structure :

PROPOSITION. *La structure de Calabi-Yau généralisée définie par une structure de Monge-Ampère non dégénérée* (Ω, ω) *est "intégrable" si et seulement si*

$$d\frac{\omega}{\sqrt[4]{|\lambda(\omega)|}} = d\frac{\hat{\omega}}{\sqrt[4]{|\lambda(\omega)|}} = 0,$$

$\lambda(\omega)$ *étant le pfaffien de Hitchin de* ω *et* $\hat{\omega}$ *la forme duale de Hichin associée à* ω.

Nous montrons ensuite un autre critère d'équivalence locale qui cette fois admet une interprétation géométrique beaucoup plus explicite :

THEOREME. *Une équation de Monge-Ampère en dimension* 3 *associée à une structure de Monge-Ampère non dégénérée est localement équivalente à l'une des trois équations*

$$\begin{cases} \mathrm{hess}(f) = 1 \\ \Delta f - \mathrm{hess}(f) = 0 \\ \Box f + \mathrm{hess}(f) = 0 \end{cases}$$

si et seulement si la structure de Calabi-Yau généralisée qu'elle définit est intégrable et plate.

Chapitre 5 : Grassmannienne associée à une équation de Monge-Ampère.

La grassmannienne $IE_\omega(x_0)$ associée à une équation de Monge-Ampère $\Delta_\omega = 0$ en un point x_0 est l'ensemble des espaces tangents en x_0 de toutes les solutions de cette équation qui passent par x_0. Autrement dit c'est l'ensemble des plans lagrangiens L de $(T_{x_0}T^*\mathbb{R}^n, \Omega_{x_0})$ tels que $\omega_{x_0}|_L = 0$.

Nous étudions tout d'abord la grassmannienne $IE_\omega \subset U(3)/SO(3)$ associée à une des trois équations de Monge-Ampère non dégénérées et à coefficients constants sur $\mathbb{R}^3$ et plus précisément l'ouvert

$$IE_\omega^\dagger = \{L \in IE_\omega : q_\omega|_L \text{est non dégénérée}\}.$$

Nous montrons la

PROPOSITION. *(1) si $\lambda(\omega) = 1$ alors*

$$IE_\omega^\dagger = \big(SL(3)/SO(3)\big) \sqcup \big(SL(3)/SO(1,2)\big)$$

(2) si $\lambda(\omega) = -1$ et $\varepsilon(q_\omega) = (0,6)$ alors

$$IE_\omega = IE_\omega^\dagger = SU(3)/SO(3)$$

(3) si $\lambda(\omega) = -1$ et $\varepsilon(q_\omega) = (4,2)$ alors

$$IE_\omega^\dagger = SU(2,1)/SO(2,1)$$

Nous nous intéressons ensuite à la grassmannienne associée à une équation de Monge-Ampère pluriharmonique en dimension complexe 2. Nous montrons qu'elle s'identifie via le plongement de Plücker à une sous-variété algébrique réelle de $\mathbb{C}P^4$:

PROPOSITION. *Soit ω une 4-forme réelle bieffective sur $\mathbb{C}^4$ et $h_\omega = q_\omega + i\Omega$ la forme hermitienne sur $\mathbb{C}^5$ associée. La grassmannienne des plans lagrangiens complexes sur lesquels s'annule ω s'identifie via le plongement de Plücker à la sous-variété algébrique réelle de $\mathbb{C}P^4$*

$$q_\Omega = q_\omega = 0.$$

Nous étudions enfin quelques exemples explicites de telles grassmanniennes.

La cohomologie modulo 2 de la grassmannienne associée à une équation de Monge-Ampère définit des invariants topologiques sur les singularités des solutions. Nous complétons les résultats de Zilbergleit sur la cohomologie de la grassmannienne associée à une équation de Monge-Ampère en dimension 3 :

PROPOSITION. *(1) La grassmannienne $IE_\omega(x_0)$ associée à l'EMA*

$$\mathrm{hess}(f) = 1$$

vérifie

$$H^*(IE_\omega(x_0), \mathbb{Z}_2) \overset{3}{\simeq} \mathbb{Z}_2[W_1, W_2, U_2]/(W_1^2, W_1.U_2).$$

(2) La grassmannienne $IE_\omega(x_0)$ associée à l'EMA

$$\Box f + \mathrm{hess}(f) = 0$$

vérifie

$$H^*(IE_\omega(x_0), \mathbb{Z}_2) \overset{3}{\simeq} \mathbb{Z}_2[W_1, W_2, U_2]/(W_1^2).$$

(3) La grassmannienne $IE_\omega(x_0)$ *associée à l'EMA*

$$\Delta f - \mathrm{hess}(f) = 0$$

vérifie

$$H^*(IE_\omega(x_0), \mathbb{Z}_2) \overset{3}{\simeq} \mathbb{Z}_2[W_2, W_3]/(W_2^2, W_3^2).$$

où $\overset{3}{\simeq}$ *désigne un isomorphisme jusqu'à l'ordre* 3 *d'anneaux gradués.*

Première partie

Opérateurs de Monge-Ampère et formes effectives

CHAPITRE 1

Le théorème de Hodge-Lepage-Lychagin

Nous présentons ici l'approche géométrique des équations de Monge-Ampère proposée par Lychagin ([**L**]). Beaucoup de résultats exposés dans ce chapitre sont connus mais nous les redémontrons pour la plupart, d'une part parce que leur diffusion en français ou en anglais est relativement restreinte et d'autre part parce qu'il nous semble que nous pouvons proposer le plus souvent des démonstrations plus simples.

Nous définissons tout d'abord la notion d'opérateur de Monge-Ampère et établissons la correspondance entre formes effectives et EMA. Nous illustrons cette approche géométrique des EMA en étudiant les équations de Chynoweth-Sewell. Nous donnons ensuite une démonstration du théorème de Hodge-Lepage-Lychagin. Ces deux parties sont essentiellement basées sur le cours de DEA donné par V. Roubtsov à l'Université de Nantes en 1999. Dans la troisième partie nous donnons une version complexe de cette théorie des opérateurs de Monge-Ampère en introduisant la notion d'opérateur pluriharmonique associé à une forme bieffective.

1. Géométrie de contact et opérateurs de Monge-Ampère

Soit M une variété réelle lisse de dimension n. On note $T^*M \xrightarrow{\pi} M$ son fibré cotangent. Rappelons que la forme de Liouville $\rho \in \Omega^1(T^*M)$ est la forme différentielle définie par

$$\langle \rho_\xi, X\rangle = \langle \xi_q, T_\xi\pi(X)\rangle,$$

pour $\xi \in T^*_qM$ et $X \in T_\xi T^*M$. La forme symplectique naturelle sur T^*M est alors

$$\Omega = -d\rho.$$

Si $q = (q_1, \ldots, q_n)$ est un système de coordonnées locales sur M, on a alors dans le système de coordonnées (q,p) induit sur T^*M :

$$\begin{cases} \rho = \displaystyle\sum_{i=1}^n p_i dq_i \\ \Omega = \displaystyle\sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i. \end{cases}$$

1.1. L'espace des jets J^1M.

Le fibré $J^1M \xrightarrow{\pi} M$ des 1-jets au dessus de M est le fibré vectoriel de rang $n+1$ au dessus de M dont les fibres J^1_qM sont définies par

$$J^1_qM = \mathcal{E}(q)/\sim,$$

où $\mathcal{E}(q)$ est l'espace des germes de fonctions lisses en q et $f \sim g$ en q si et seulement si f et g ont le même développement de Taylor à l'ordre 1.

J^1M est une variété lisse de dimension $2n+1$ et si $(q_1, \ldots, q_n)$ est un système de coordonnées locales sur M alors le système de coordonnées induit sur J^1M est (q, u, p) avec

$$\begin{cases} q_i([f]_q) = q_i, & i = 1, \ldots, n \\ u([f]_q) = f(q) \\ p_i([f]_q) = \dfrac{\partial f}{\partial q_i}(q), & i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

A toute fonction lisse f sur M on associe la section naturelle

$$j^1(f) : M \to J^1M, q \mapsto [f]_q.$$

On note $\alpha : J^1M \to \mathbb{R}$ et $\beta : J^1M \to T^*M$ les projections définies par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} & J^1M \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[r, "\beta"] & T^*M \\ & M \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "j^1(f)"] \arrow[ur, "df"'] & \end{tikzcd}$$

Structure de contact

La 1-forme naturelle du sur $\mathbb{R}$ et la forme de Liouville sur T^*M permettent de munir J^1M d'une 1-forme $U \in \Omega^1(J^1M)$ appelée forme de contact et définie par

$$U = \alpha^*(du) - \beta^*(\rho).$$

Dans un système de coordonnée (q, u, p) de J^1M, U et dU s'écrivent

$$\begin{cases} U = du - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i \\ dU = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i. \end{cases}$$

Le champ de Reeb est l'unique champ de vecteurs X_1 tel que

$$\begin{cases} U(X_1) = 1 \\ i_{X_1} dU = 0. \end{cases}$$

Dans le système de coordonnées (q, u, p), $X_1 = \frac{\partial}{\partial u}$.

La distribution de contact C sur J^1M est la distribution d'espaces vectoriels $C : x \mapsto \mathrm{Ker}(U_x)$. Notons que pour tout point $x \in J^1M$, $(C(x), dU_x)$ est un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$ et que

$$T_x J^1M = C(x) \oplus X_1(x).$$

De plus $T_x\beta : (C(x), dU_x) \to (T_{\beta(x)}T^*M, \Omega_{\beta(x)})$ est un isomorphisme symplectique.

Sous-variétés legendriennes

Une sous-variété L de J^1M est dite legendrienne si elle est isotrope (i.e. $U|_L = 0$) et de dimension n. Les sous-variétés legendriennes sont les sous-variétés intégrales maximales de la distribution de contact. Notons enfin que si f est une fonction lisse sur J^1M, alors le graphe j_1f de la section $j^1(f)$ est une sous-variété legendrienne et réciproquement, toute sous-variété legendrienne qui se projette difféomorphiquement sur M est localement un tel graphe.

1.2. Opérateurs de Monge-Ampère.

DEFINITION 1.1. *Soit $\omega \in \Omega^n(J^1M)$. L'opérateur de Monge-Ampère associé à ω est l'opérateur différentiel*

$$\Delta_\omega : C^\infty(M) \to \Omega^n(M)$$

défini par

$$\Delta_\omega(f) = \Big(j^1(f)\Big)^*\omega.$$

Une solution régulière de l'EMA $\Delta_\omega = 0$ est une fonction lisse f sur M telle que $\Delta_\omega(f) = 0$.

Une solution généralisée de l'EMA $\Delta_\omega = 0$ est une sous-variété legendrienne L de J^1M sur laquelle s'annule ω :

$$\begin{cases} \dim(L) = n \\ U|_L = 0 \\ \omega|_L = 0. \end{cases}$$

Comme on l'a remarqué précédemment, localement, les solutions régulières sont les solutions généralisées qui se projettent bien sur la base M. L'ensemble des points singuliers de la projection $\pi : L \to M$ s'appelle le front d'onde de la solution généralisée L.

Difféomorphismes de contact

Le plus grand (pseudo) groupe de difféomorphismes qui préserve les sous-variétés legendriennes de J^1M est le groupe des difféomorphismes de contact $Ct(J^1M)$:

DEFINITION 1.2. *Un difféomorphisme $F : J^1M \to J^1M$ est de contact si il existe une fonction lisse f sur J^1M telle que*

$$F^*(U) = f \cdot U.$$

F est dit de contact strict si $f = 1$.

Ce groupe est bien “le plus grand possible” comme le montre le lemme trivial suivant

LEMME 1.3. *Un difféomorphisme $F : J^1M \to J^1M$ est de contact si et seulement si il préserve la distribution de contact i.e.*

$$T_xF(C(x)) = C(F(x))$$

pour tout $x \in J^1M$.

Les exemples les plus classiques de difféomorphismes de contact sur $J^1\mathbb{R}^n$ sont les

(1) translations
   (a) $F_1(q, u, p) = (q + a, u + t, p)$, $(a, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

(b) $F_2(q,u,p) = (q, u + f(q), p + \frac{\partial f}{\partial q}(q))$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

(2) transformations d'échelles

$$G(q,u,p) = (e^{\lambda t}q, e^{\nu t}, e^{(\lambda-\nu)t}p),\ \ \lambda, \nu, t \in \mathbb{R}$$

(3) transformations de Legendre

$$H(q,u,p) = (p, u - pq, -q)$$

L'action des difféomorphismes de contact sur l'espace des formes différentielles induit une action sur l'espace des opérateurs de Monge-Ampère,

$$F \cdot \Delta_\omega = \Delta_{F^*\omega},$$

et cette action préserve les solutions comme on le constate immédiatement :

LEMME 1.4. *L est une solution généralisée de l'EMA $\Delta_{F^*\omega} = 0$ si et seulement si $F(L)$ est une solution de l'EMA $\Delta_\omega = 0$.*

Cependant, les difféomorphismes de contact ne préservent pas à priori les fronts d'onde. Ainsi une solution régulière n'est en générale plus régulière lorsque l'on applique une transformation de contact.

Idéal de Cartan

Déterminer si deux EMA sont équivalentes, c'est déterminer si l'on peut déduire les solutions de l'une en appliquant une transformation de contact à l'autre. La description de ces équations par les opérateurs de Monge-Ampère ramène ce problème à l'étude de l'action du groupe de contact sur l'espace des formes différentielles $\Omega^n(J^1M)$. Lorsque l'on se restreint aux formes effectives, ces deux problèmes sont identiques car la correspondance entre opérateurs de Monge-Ampère et classes conformes de formes effectives est biunivoque.

DEFINITION 1.5. *Une forme différentielle $\omega \in \Omega^k(J^1M)$ est dite effective si*

(1) $i_{X_1}\omega = 0$

(2) en tout point x de J^1M la forme extérieure $\omega_x \in \Lambda^k(C(x)^*)$ est effective par rapport à la forme symplectique dU_x i.e. $\omega_x \wedge dU_x = 0$.

L'espace des formes effectives sur J^1M est noté $\Omega^*_\varepsilon(C^*)$.

L'idéal de Cartan I_C est l'idéal de l'algèbre $\Omega^*(J^1M)$ engendré par U et dU. Toute forme ω s'écrit clairement de façon unique

$$\omega = \tilde{\omega}_0 + U \wedge \tilde{\omega}_1,$$

avec $i_{X_1}\tilde{\omega}_0 = i_{X_1}\tilde{\omega}_1 = 0$. De plus, d'après le théorème de Hodge-Lepage-Lychagin que nous démontrons plus loin (1.19), $\tilde{\omega}_0$ s'écrit de manière unique

$$\tilde{\omega}_0 = \omega_0 + dU \wedge \omega_1$$

où ω_0 est effective. Il en résulte la proposition suivante,

PROPOSITION 1.6.

$$\Omega^*_\varepsilon(C^*) = \Omega^*(J^1M)/I_C.$$

Cette proposition explique en quelque sorte la surjectivité de l'application qui associe une EMA à une forme effective.

De plus, d'après 1.25, deux formes effectives s'annulent sur les même sous-variétés legendriennes si et seulement si elles sont proportionnelles, et donc on a "l'injectivité" de notre application :

PROPOSITION 1.7. *Deux formes différentielles $\omega, \theta \in \Lambda^n(J^1M)$ définissent la même EMA si et seulement si il existe une fonction lisse f sur J^1M telle que*

$$\theta_0 = f \cdot \omega_0,$$

ω_0 et θ_0 étant les parties effectives de ω et θ.

Symétries de contact

Pour simplifier le problème, nous supposerons que nos équations de Monge-Ampère admettent une certaine symétrie.

DEFINITION 1.8. *Un champ de vecteurs X sur J^1M est dit de contact si il existe une fonction lisse f sur J^1M tel que*

$$L_X U = f \cdot U.$$

Si $f = 0$, X est dit de contact strict.

Il est à noter que le champ de Reeb X_1 est un champ de contact puisque

$$L_{X_1} U = d i_{X_1} U + i_{X_1} dU = 0.$$

Soit X un champ de contact et $F \in C^\infty(J^1M)$ définie par $F = i_X(U)$. Comme $f \cdot U = L_X(U) = d i_X U + i_X dU = dF + i_X dU$, il vient

$$f = i_{X_1}(dF + i_X dU) = X_1(F).$$

Réciproquement soit $F \in C^\infty(J^1M)$. Soit $\theta = X_1(F)U - dF$. Comme $i_{X_1}\theta = 0$, il existe un unique champ de vecteur Y parallèle à la distribution de contact tel que $i_Y dU = \theta$. Le champ de vecteur $X_F = FX_1 + Y$ est de contact et

$$i_{X_F} U = F.$$

Il y a ainsi une bijection entre les fonctions lisses sur J^1M et les champs de contact. L'unique fonction F telle que $X = X_F$ est appelée la fonction génératrice du champ de contact X. En coordonnées locales, X_F sécrit

$$X_F = -\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} + (f - p\frac{\partial f}{\partial p})\frac{\partial}{\partial u} + (\frac{\partial f}{\partial q} + p\frac{\partial f}{\partial u})\frac{\partial}{\partial p}.$$

Un champ de contact X_F est de contact strict si et seulement si $X_1(F) = 0$. Dans ce cas, X_F s'identifie localement au champ hamiltonien sur T^*M d'hamiltonien $F \in C^\infty(T^*M)$.

DEFINITION 1.9. *Une symétrie infinitésimale de l'opérateur de Monge-Ampère $\Delta_\omega = 0$ est la donnée d'un champ de contact X_F tel que*

$$\Delta_{L_{X_F}\omega} = 0.$$

Un opérateur de Monge-Ampère qui possède une symétrie infinitésimale est dit symplectique.

Si X_F est un champ de contact alors il existe un difféomorphisme de contact local ϕ tel que $\phi(X_F) = X_1$. Ainsi, si Δ_ω est symplectique, il existe une forme effective $\omega_0 \in \Omega^n_\varepsilon(C^*)$ telle que $L_{X_1}\omega_0 = 0$ et telle que Δ_{ω_0} soit dans l'orbite de Δ_ω pour l'action des difféomorphismes de contact locaux. De plus, l'espace

$$\{\omega \in \Omega^n_\varepsilon(C^*) : L_{X_1}\omega = 0\}$$

s'identifie via la projection β à l'espace des formes effectives sur (T^*M, Ω)

$$\Omega^n_\varepsilon(T^*M) = \{\omega \in \Omega^n(T^*M) : \omega \wedge \Omega = 0\}$$

Nous nous intéresserons dorénavant à ces opérateurs de Monge-Ampère symplectiques. Il est suffisant pour de tels opérateurs de se restreindre à l'étude de l'action locale des symplectomorphismes de T^*M sur l'espace des formes effectives $\Omega^n_\varepsilon(T^*M)$.

1.3. Les équations de Chynoweth-Sewell. Nous nous proposons ici d'étudier les équations de Chynoweth-Sewell du point de vue de la théorie des opérateurs de Monge-Ampère. Ces équations sont issues du modèle "semi-géostrophique" ([**CS**]) et peuvent s'écrirent dans les variables réelles (x, y, z)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = c,\ c \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

L'équation initiale de Chynoweth-Sewell correspond en fait au cas $c = 0$. Notons que dans ce cas là, toute solution $f(x, y)$ de l'équation $\mathrm{hess}(f) = 1$ nous donne une solution $f(x, y) - \frac{1}{2}z^2$ de (4). Ainsi par exemple,

$$\frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + 2y)^3} - \frac{1}{2}z^2$$

est une solution de (4) pour $c = 0$. L'équation en deux variables $\mathrm{hess}(f) = 1$ étant symplectiquement équivalente à l'équation $\Delta f = 0$, on peut ainsi construire plusieurs solutions de ce type à partir de fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}^2$.

Nous allons construire une solution généralisée plus symétrique en (x, y, z). Soit (x, y, z, p, q, h) le système de coordonnées symplectique sur $T^*\mathbb{R}^3$. La forme effective associée à (4) est, à un facteur conforme près,

$$\omega_c = dp \wedge dq \wedge dz + dx \wedge dy \wedge dh - cdx \wedge dy \wedge dz.$$

Cette forme est clairement la somme de deux formes décomposables :

$$\omega_c = dp \wedge dq \wedge dz + dx \wedge dy \wedge (dh - cdz).$$

Considérons alors le changement de variables symplectique

$$\phi_c(x, y, z, p, q, h) = (x, y, h, p, q, c.h - z).$$

On constate que

$$\phi_c^*(\omega) = dp \wedge dq \wedge dh - dx \wedge dy \wedge dz.$$

Ainsi, modulo ce changement de variables, les solutions de l'EMA classique

$$\mathrm{hess}(f) = 1$$

sont les solutions des équations de Chynoweth-Sewell. Voici un exemple de telle solution :

LEMME 1.10. *Lorsque n est impair, la fonction de n variables*

$$f(x_1,\dots,x_n) = 2\int_a^{\sum_{i<j} x_i x_j} (b + \frac{\xi^n}{n-1})d\xi,\ \ (a,b)\in\mathbb{R}^2$$

est une solution de l'équation différentielle

$$\mathrm{hess}(f) = 1.$$

En particulier, pour $n = 3$, une telle solution s'écrit

$$f(x,y,z) = \int_a^{\sqrt{xy+yz+zx}} (b + 4\xi^3)d\xi.$$

Une solution généralisée de (4) est alors

$$L = \{(x, y, (x+y)\alpha, (y+z)\alpha, (z+x)\alpha, c(x+y)\alpha - z)\},$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2}(\frac{b}{(xy+yz+zx)^{\frac{3}{2}}} + 4)^{\frac{1}{3}}.$$

Son front d'onde est

$$\Sigma(L) = \{x+y=0\}\cap\{xy+yz+zx>0\} = \emptyset.$$

L est donc une solution régulière définie sur l'ouvert $xy+yz+zx>0$.

2. Formes effectives sur un espace symplectique

Soit V^{2n} un espace vectoriel réel de dimension $2n$. On munit V d'une forme symplectique Ω, i.e. Ω est une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée. Soit $\Gamma : V \to V^*$ l'isomorphisme induit par Ω et $\Gamma^* : \Lambda^*(V) \to \Lambda^*(V^*)$ sa puissance extérieure. On note $X_\Omega \in \Lambda^2(V)$ l'unique bivecteur tel que $\Gamma^*(X_\Omega) = \Omega$. Une base $(e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_n)$ est dite symplectique si dans la base duale, Ω s'écrit

$$\Omega = e_1^*\wedge f_1^* + \cdots + e_n^*\wedge f_n^*.$$

X_Ω s'écrit dans une telle base symplectique

$$X_\Omega = e_1\wedge f_1 + \cdots + e_n\wedge f_n.$$

On note X_θ l'image réciproque par Γ d'une 1-forme $\theta\in V^*$. C'est l'unique vecteur vérifiant pour tout $Y\in V$,

$$\theta(Y) = \Omega(X_\theta, Y).$$

2.1. Les opérateurs $\perp$ et $\top$.

DEFINITION 1.11. *On définit sur l'algèbre extérieure $\Lambda^*(V^*)$ de V les opérateurs*

$$\begin{cases} \perp : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{k-2}(V^*), & \omega\mapsto i_{X_\Omega}(\omega) \\ \top : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{k+2}(V^*), & \omega\mapsto \omega\wedge\Omega \\ [\perp,\top] : \Lambda^k(V) \to \Lambda^k(V^*), & \omega\mapsto \perp\top\omega - \top\perp\omega. \end{cases}$$

LEMME 1.12. *Pour tout couple de formes $(\omega,\theta)\in\Lambda^k(V^*)\times V^*$, la relation suivante est vérifiée*

$$\perp(\theta\wedge\omega) = \theta\wedge\perp\omega - i_{X_\theta}(\omega).$$

DÉMONSTRATION. Fixons une base symplectique $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$ de V. Si θ s'écrit dans cette base

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^* + \beta_i f_i^*,$$

alors X_θ s'écrit

$$X_\theta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i - \alpha_i f_i.$$

Et donc

$$\begin{aligned}\perp(\theta \wedge \omega) &= \sum_{i=1}^{n} i_{f_i}(i_{e_i}(\theta \wedge \omega)) = \sum_{i=1}^{n} i_{f_i}(\alpha_i \omega - \theta \wedge i_{e_i}(\omega)) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}(i_{\alpha_i f_i}(\omega) - i_{\beta_i e_i}(\omega) + \theta \wedge i_{e_i \wedge f_i}(\omega) = \theta \wedge \perp\omega - i_{X_\theta}(\omega).\end{aligned}$$

□

LEMME 1.13. *Pour toute k-forme ω,*

$$[\perp, \top]\omega = (n-k)\omega.$$

DÉMONSTRATION. Par récurrence sur k :
Si $k = 1$ alors $\perp\omega = 0$. Donc, d'après 1.12,

$$[\perp, \top]\omega = \perp(\omega \wedge \Omega) = (\perp\Omega)\omega - i_{X_\omega}\Omega = (n-1)\omega.$$

Supposons maintenant le résultat vrai pour toute k-forme. Soit θ une 1-forme et ω une k-forme sur V :

$$\begin{aligned}[\perp, \top](\theta \wedge \omega) &= \perp(\theta \wedge \Omega \wedge \omega) - \perp(\theta \wedge \omega) \wedge \Omega \\ &= \theta \wedge \perp\top(\omega) - i_{X_\theta}(\Omega \wedge \omega) + i_{X_\theta}(\omega) \wedge \Omega - \theta \wedge \top\perp(\omega) \\ &= (n-k)\theta \wedge \omega - i_{X_\theta}(\Omega) \wedge \omega \\ &= (n-k-1)\theta \wedge \omega\end{aligned}$$

et donc le résultat est vrai pour toute forme de degré $k+1$. □

Par une récurrence immédiate on en déduit le

COROLLAIRE 1.14. *Si $\omega \in \Lambda^k(V^*)$, alors pour tout $s \geq 0$,*

$$\begin{cases}[\perp, \top^s]\omega = s(n-k-s+1)\top^{s-1}\omega \\ [\perp^s, \top]\omega = s(n-k+s-1)\perp^{s-1}\omega.\end{cases}$$

LEMME 1.15.

$$\begin{cases}\perp : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k-2}(V^*) \text{ est injective pour } k \geq n+1 \\ \top : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k+2}(V^*) \text{ est injective pour } k \leq n-1.\end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Soit $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ telle que $\perp\omega = 0$ avec $k \geq n+1$. D'après 1.14 on a pour tout s

$$\perp^s\top^s\omega = \perp^{s-1}([\perp, \top^s]\omega) = s(n-k-s+1)\perp^{s-1}\top^{s-1}\omega.$$

Puisque $\perp\top\omega = (n-k)\omega$, on en déduit alors que

$$\perp^n\top^n\omega = n!(1-k)(2-k)\cdots(n-k)\omega.$$

Or $\top^n\omega = 0$ puisque qu'il n'y a qu'une seule forme de degré $k + 2n$ sur V. Et donc $\omega = 0$.

L'injectivité de $\top$ en degré $k \leq n-1$ se montre de façon tout à fait similaire. $\square$

2.2. Décomposition de l'algèbre des formes extérieures sur un espace symplectique. Soit $sl(2,\mathbb{C})$ l'algèbre de Lie des matrices complexes 2×2 de trace nulle. Notons $\{E, F, H\}$ la base canonique de $sl(2,\mathbb{C})$:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La propriété 1.13 des opérateurs $\perp$ et $\top$ permet de munir $\Lambda^*(V^*) \otimes \mathbb{C}$ d'une structure de $sl(2,\mathbb{C})$-module en posant

$$\begin{cases} E = \perp \\ F = \top \\ H = [\perp, \top]. \end{cases}$$

Rappelons quelques résultats de la théorie des représentations de $sl(2,\mathbb{C})$. Soit W un $sl(2,\mathbb{C})$-module de dimension finie m. Un sous-module de W est dit irréductible si ses seuls sous-modules sont $\{0\}$ et lui-même. D'après le théorème de Weyl, W s'écrit comme somme directe de sous-modules irréductibles

$$W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_p.$$

Un vecteur v non nul est dit primitif si v est un vecteur propre de H et si $Ev = 0$. Tout sous-module Z possède un vecteur primitif. En effet H est un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire sur Z et possède donc un vecteur propre $v_0 \in Z$ de valeur propre λ. Si Ev_0 est non nul alors Ev_0 est un vecteur propre de H de valeur propre $\lambda + 2$. Puisque H n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, il existe nécessairement $s \geq 1$ tel que $E^s v_0 = 0$ et $E^{s-1}v_0 \neq 0$. Le vecteur $v = E^{s-1}v_0 \in Z$ est alors primitif. Soit maintenant v un vecteur primitif de Z de valeur propre λ. Posons $v_{-1} = 0$ et $v_k = \frac{1}{k!}F^k v$. On vérifie aisément que

$$\begin{cases} Hv_k = (\lambda - 2k)v_k \\ Fv_k = (k+1)v_{k+1} \\ Ev_k = (\lambda - k + 1)v_{k-1}. \end{cases}$$

Ainsi, puisque Z est irréductible, λ est nécessairement entier et une base de Z est $\{v_0, \ldots, v_\lambda\}$. D'où la proposition

PROPOSITION 1.16. *Tout élément w de W se décompose en une somme finie*

$$v = \sum_{i,j} F^i v_j$$

les v_j étant des vecteurs primitifs.

Revenons maintenant au cas où $W = \Lambda^*(V^*) \otimes \mathbb{C}$, V étant un espace symplectique de dimension $2n$.

DEFINITION 1.17. *Une forme $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ est dite effective si*

$$\perp\omega = 0.$$

L'espace des k-formes effectives sur V est noté $\Lambda^k_\varepsilon(V^*)$.

LEMME 1.18. *Si $\omega \in \Lambda^n(V^*)$ alors ω est effective si et seulement si $\omega \wedge \Omega = 0$.*

DÉMONSTRATION. D'après 1.13, $\perp\top\omega = \top\perp\omega$. De plus $\perp : \Lambda^{n+2} \to \Lambda^n(V^*)$ et $\top : \Lambda^{n-2}(V^*) \to \Lambda^n(V^*)$ sont injectives. Dès lors

$$\perp\omega = 0 \Leftrightarrow \top\perp\omega = 0 \Leftrightarrow \perp\top\omega = 0 \Leftrightarrow \top\omega = 0.$$

□

En vertu du lemme 1.13, les vecteurs primitifs du $sl(2,\mathbb{C})$-module $\Lambda^*(V^*) \otimes \mathbb{C}$ sont les formes $\alpha + i\beta$ avec α et $\beta \in \Lambda^k_\varepsilon(V^*)$.

THEOREME 1.19 (Hodge-Lepage-Lychagin I)**.** *Toute forme $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ se décompose en une somme finie*

$$\omega = \omega_0 + \top\omega_1 + \top^2\omega_2 + \cdots + \top^s\omega_s,$$

les ω_i étant des formes effectives et uniquement déterminées par les relations

$$\omega_i = \alpha_i \perp^i(\omega - \top^s\omega_s - \top^{s-1}\omega_{s-1} - \cdots - \top^{i+1}\omega_{i+1}),$$

où

$$\alpha_i = \frac{1}{i!}\frac{1}{(n-k+i+1)(n-k+i+2)\cdots(n-k+2i)}.$$

DÉMONSTRATION. L'existence de cette décomposition provient de 1.16 en remplaçant v par ω et en identifiant les formes réelles de même degré à gauche et à droite de l'égalité. On a vu que pour toute forme effective $\theta \in \Lambda^p_\varepsilon(V^*)$, on a

$$\perp^r\top^r\theta = r!(n-p-r+1)(n-p-r+2)\cdots(n-p)\theta.$$

Donc $\perp^s\top^i\omega_i = 0$ pour $i < s$ et

$$\perp^s\top^s\omega_s = s!(n-k+s+1)(n-k+s+2)\cdots(n-k+2s)\omega_s.$$

On en déduit que $\perp^s\omega = \frac{1}{\alpha_s}\omega_s$. On recommence alors avec $\omega - \top^s\omega_s$ et ainsi de suite. □

2.3. Formes effectives et sous-espaces lagrangiens. Rappelons qu'un sous-espace lagrangien d'un espace vectoriel symplectique (V^{2n}, Ω) est un sous-espace vectoriel L de dimension n de V sur lequel s'annule la forme symplectique : $\Omega|_L = 0$.

Nous démontrons ici la propriété essentielle des formes effectives pour la théorie des opérateurs de Monge-Ampère : une forme effective est "uniquement déterminée", à facteur conforme près, par les sous-espaces lagrangiens sur lesquels elle s'annule.

Nous noterons par la suite pour $\theta \in \Lambda^k(V^*)$ et $A \in V$,

$$\theta_A = i_A(\theta).$$

Commençons par une formule de récurrence :

LEMME 1.20. *Soit A et B deux vecteurs de V tels que $\Omega(A,B) = 1$ et soit W^{2n-2} l'orthogonal symplectique de $\mathbb{R}A \oplus \mathbb{R}B$. Notons Ω' la restriction de Ω à W, $\Omega_A = i_A(\Omega)$ la contraction de Ω par A et $\Omega_B = i_B(\Omega)$ la contraction de Ω par B. Toute forme effective $\omega \in \Lambda^k_\varepsilon(V^*)$ se décompose de manière unique*

$$\omega = (\Omega_A \wedge \Omega_B - \frac{\Omega'}{n-k+1}) \wedge \omega_0 + \Omega_A \wedge \omega_1 + \Omega_B \wedge \omega_2 + \omega_3,$$

les formes ω_i étant des formes effectives sur (W, Ω').

Démonstration. ω s'écrit de manière unique dans la décomposition $V = W \oplus \mathbb{R}A \oplus \mathbb{R}B$

$$\omega = \Omega_A \wedge \Omega_B \wedge \omega_0 + \Omega_A \wedge \omega_1 + \Omega_B \wedge \omega_2 + \omega_3,$$

avec $\omega_i \in \Lambda^*(W^*)$ pour $i = 0, \dots, 3$. Notons $\perp'$ et $\top'$ les opérateurs associés à Ω'. Puisque ω est effective, il vient

$$\omega_0 + \Omega_A \wedge \perp'\omega_1 + \Omega_B \wedge \perp'\omega_2 + \perp'\omega_3 = 0.$$

Donc ω_1 et ω_2 sont effectives et $\perp'\omega_3 = -\omega_0$. Posons alors $\theta_3 = (n-k+1)\omega_3 + \Omega' \wedge \omega_0$. La forme θ_3 est effective. En effet

$$\perp'\theta_3 = -(n-k+1)\omega_0 + ((n-1)-(k-2))\omega_0 = 0.$$

Or

$$\omega = \Omega_A \wedge \Omega_B \wedge \omega_0 + \Omega_A \wedge \omega_1 + \Omega_B \wedge \omega_2 + \frac{\theta_3}{n-k+1} - \frac{\Omega'}{n-k+1} \wedge \omega_0.$$

On en déduit le résultat. □

Pour le cas particulier où $k = n$ on obtient le

COROLLAIRE 1.21. *Toute n-forme effective ω sur un espace symplectique (V, Ω) de dimension $2n$ s'écrit de manière unique dans la décomposition symplectique $V = W \oplus \mathbb{R}A \oplus \mathbb{R}B$*

$$\omega = (\Omega_A \wedge \Omega_B - \Omega') \wedge \omega_0 + \Omega_A \wedge \omega_1 + \Omega_B \wedge \omega_2,$$

les formes $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ étant des formes effectives sur W.

REMARQUE 1.22. *La formule suivante découle de ce corollaire*

$$\Lambda^n_\varepsilon(\mathbb{R}^{2n}) = \Lambda^{n-2}_\varepsilon(\mathbb{R}^{2n-2}) \oplus \Lambda^{n-1}_\varepsilon(\mathbb{R}^{2n-2}) \oplus \Lambda^{n-1}_\varepsilon(\mathbb{R}^{2n-2}).$$

En particulier, pour $n = 3$,

$$\Lambda^3_\varepsilon(\mathbb{R}^6) = \mathbb{R}^4 \oplus \Lambda^2_\varepsilon(\mathbb{R}^4) \oplus \Lambda^2_\varepsilon(\mathbb{R}^4).$$

Ainsi $\Lambda^3_\varepsilon(\mathbb{R}^6)$ est de dimension $4+5+5 = 14$. Notons aussi que l'espace des 2-formes effectives sur $\mathbb{R}^6$, qui est l'orthogonal euclidien de Ω dans l'espace des matrices antisymétriques $so(6)$ est aussi de dimension 14. Nous reviendrons plus loin sur cette mystérieuse dimension 14.

LEMME 1.23. *Soit $\omega \in \Lambda^k_\varepsilon(V^*)$ tel que*

$$\omega_A \wedge \Omega_A = 0$$

pour tout $A \in V$. Alors $\omega = 0$.

Démonstration. Par récurrence sur n.

Pour $n = 1$, soit $\omega \in \Lambda^1_\varepsilon(V^*) = \Lambda^1(V^*)$. Comme $\omega_A \wedge \Omega_A = \omega(A)\Omega_A$, on en déduit que $\omega(A) = 0$ pour tout A et donc $\omega = 0$.

Soit maintenant $\omega \in \Lambda^k(V^*)$, V étant de dimension $2n$, $n \geq 2$. D'après 1.20, ω s'écrit dans une décomposition symplectique $V = W \oplus \mathbb{R}A \oplus \mathbb{R}B$,

$$\omega = (\Omega_A \wedge \Omega_B - \frac{\Omega'}{n-k+1}) \wedge \omega_0 + \Omega_A \wedge \omega_1 + \Omega_B \wedge \omega_2 + \omega_3.$$

Or $\Omega_A \wedge \omega_2 = -\Omega_A \wedge \omega_A = 0$. Donc comme ω_2 est une forme sur W (et donc indépendante de Ω_A), on en déduit que $\omega_2 = 0$. De la même façon, $\omega_1 = 0$. Soit maintenant $C \in W$. De $\omega_C \wedge \Omega_C = 0$, il vient

$$\begin{cases} i_C(\omega_0) \wedge \Omega'_C = 0 \\ i_C(\omega_3) \wedge \Omega_C = \dfrac{\Omega'}{n-k+1} \wedge i_C(\omega_0) \wedge \Omega_C. \end{cases}$$

Par récurrence, on déduit que $\omega_0 = 0$ et donc que $\omega_3 = 0$. □

PROPOSITION 1.24. *Soit (V,Ω) un espace symplectique de dimension $2n$ et $\omega \in \Lambda^k_\varepsilon(V^*)$ telle que ω s'annule sur tout sous-espace isotrope de dimension k de V. Alors $\omega = 0$.*

Démonstration. Par récurrence sur n.

Le cas $n = 1$ est trivial puisque toutes les droites de $V = \mathbb{R}^2$ sont isotropes.

Supposons la proposition vraie jusqu'au rang n, $n \geq 1$. Soit la décomposition 1.20

$$\omega = (\Omega_A \wedge \Omega_B - \frac{\Omega'}{n-k+1}) \wedge \omega_0 + \Omega_A \wedge \omega_1 + \Omega_B \wedge \omega_2 + \omega_3,$$

pour un choix arbitraire de A et B. Soit $Y = Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_{k-1}$ un sous-espace isotrope de W. De $\omega(Y \wedge A) = 0$, il vient $\omega_2(Y) = 0$. Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $\omega_2 = 0$. Or $\omega_A \wedge \omega_A = -\omega_2 \wedge \Omega_A = 0$. Mais ceci pour tout A. D'après 1.23, $\omega = 0$. □

THEOREME 1.25 (Hodge-Lepage-Lychagin II)**.** *Soit deux formes effectives ω et θ de degré n sur un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$. Si θ s'annule sur tout sous-espace lagrangien sur lequel s'annule ω alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\theta = \lambda\omega.$$

Démonstration. Encore une fois par récurrence.

Le cas $n = 1$ est trivial puisque deux formes qui ont même noyau sont proportionnelles.

Supposons le résultat vrai au rang $n-1$. Ecrivons les décompositions 1.21 de ω et θ pour un choix arbitraire de A et B :

$$\begin{cases} \omega = (\Omega_A \wedge \Omega_B - \Omega') \wedge \omega_0 + \Omega_A \wedge \omega_1 + \Omega_B \wedge \omega_2 \\ \theta = (\Omega_A \wedge \Omega_B - \Omega') \wedge \theta_0 + \Omega_A \wedge \theta_1 + \Omega_B \wedge \theta_2. \end{cases}$$

Soit L un sous-espace lagrangien de W. Si $\omega_2(L) = 0$ alors $\omega(L \wedge A) = 0$, donc $\theta(L \wedge A) = 0$ et donc $\theta_2(L) = 0$. D'après l'hypothèse de récurrence $\theta_2 = \lambda_2\omega_2$. De la même façon, $\theta_1 = \lambda_1\omega_1$. Soit $\tilde{\theta} = \omega - \lambda_1(\theta)$:

$$\tilde{\theta} = (\Omega_A \wedge \Omega_B - \Omega') \wedge \tilde{\theta}_0 + (\lambda_2 - \lambda_1)\Omega_B \wedge \omega_2.$$

Soit $L = L_1 \wedge \cdots \wedge L_n$ sous-espace lagrangien de W. Soit U une solution du système linéaire à $n+1$ équations et $2n$ inconnues

$$\begin{cases} \Omega(L_i, U) = 0 \\ \Omega(A, U) = 0 \\ \omega(L \wedge U) = 0. \end{cases}$$

$L \wedge U$ est un sous-espace lagrangien de V donc, nécessairement, $\Omega(B,U) \neq 0$. De plus $\omega(L \wedge U) = 0$, donc $\tilde{\theta}(L \wedge U) = 0$. Or,

$$\tilde{\theta}(L \wedge U) = (\lambda_2 - \lambda_1)\Omega(B,U)\omega_2(L) = 0.$$

De 1.24, on déduit que $(\lambda_2 - \lambda_1)\omega_2 = 0$. Ainsi

$$\tilde{\theta} = (\Omega_A \wedge \Omega_B - \Omega') \wedge \tilde{\theta}_0.$$

Soit $Y = Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_{n-2}$ un sous-espace isotrope de W. Complétons Y en un sous-espace lagrangien $Y \wedge X$ de W. Soit U une solution du système

$$\begin{cases} \Omega(Y_i, U) = 0 \\ \Omega(A + X, U) = 0 \\ \omega(Y \wedge U \wedge (A + X)) = 0. \end{cases}$$

Comme $\omega(Y \wedge U \wedge (A + X)) = 0$, $\tilde{\theta}(Y \wedge U \wedge (A + X)) = 0$. Or,

$$\tilde{\theta}(Y \wedge U \wedge (A + X)) = \Omega(A, U)\tilde{\theta}_0(Y).$$

Donc $\tilde{\theta}_0(Y) = 0$, puisque nécessairement $\Omega(A, U) \neq 0$. Et ceci pour tout sous-espace isotrope Y de W. D'après 1.24, $\tilde{\theta}_0 = 0$. Finalement $\tilde{\theta} = 0$ et donc $\theta = \lambda_1 \omega$. $\square$

3. Opérateurs pluriharmoniques

Existe-t-il une version complexe de la théorie des opérateurs de Monge-Ampère ? Que se passe t'il lorsque que l'on suppose que notre variété M est complexe ? Il y a trois approches naturelles distinctes :

(1) la première consiste à substituer les les variables complexes z et $\overline{z}$ aux variables réelles x et y. Ainsi l'équation

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} & \frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z}^2} \end{pmatrix} = 1$$

(avec $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$) est appelée en général équation de Monge-Ampère complexe. C'est pourtant l'équation de Monge-Ampère réelle

$$\frac{\partial f^2}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial y^2} - \big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\big)^2 = -\frac{1}{4}.$$

(2) la seconde consiste à remplacer partout le mot lisse par le mot holomorphe (fonction holomorphe, forme holomorphe, sous-variété holomorphe ...). On peut alors définir un opérateur de Monge-Ampère holomorphe de façon tout à fait analogue au cas lisse. Remarquons que les équations que l'on obtient sont en fait des "systèmes de Monge-Ampère" (en distinguant partie réelle et partie imaginaire).

(3) la troisième consiste à s'intéresser plus à la structure bisymplectique du fibré cotangent T^*M qu'à sa structure complexe. On considère que deux opérateurs de Monge-Ampère (réels) sont équivalents lorsqu'ils ont les mêmes solutions généralisées bilagrangiennes.

Nous voulons développer dans cette partie cette troisième approche. Celle-ci est motivée par un exemple analogue à celui des sous-variétés lagrangiennes spéciales : les sous-variétés kählériennes spéciales issues de la théorie des cordes. La notion de structure kählérienne spéciale a été récemment formalisée par D. Freed ([**F**]) : une variété kählérienne spéciale est une variété kählérienne (N, g, I, Ω) munie d'une connexion plate et sans torsion ∇ telle que $\nabla\omega = 0$ et $d_\nabla I = 0$. Hitchin a montré dans [**Hi2**] que l'espace des modules de sous-variétés lagrangiennes complexes pouvait être muni d'une structure kählérienne spéciale. Il a pour cela caractérisé les variétés kählériennes spéciales comme des sous-variétés bilagrangiennes d'un certain espace symplectique complexe. Plus précisément soit (V^{2n}, θ) un espace vectoriel symplectique réel. Hitchin munit $V \times V$ de deux formes symplectiques Ω_1 et Ω_2 et d'une pseudo métrique g définies comme suit

$$\begin{cases} \Omega_1((A,B),(A',B')) = \theta(A,A') - \theta(B,B') \\ \Omega_2((A,B),(A',B')) = \theta(A,B') + \theta(B,A') \\ g((A,B),(A',B')) = \dfrac{1}{4}\{\theta(A,B') + \theta(A'B)\}. \end{cases}$$

Il a montré que si une sous-variété bilagrangienne M de $(V \times V, \Omega_1, \Omega_2)$ est transverse aux deux projections sur V alors g induit une (pseudo) métrique kählérienne spéciale sur M et réciproquement toute métrique kählérienne spéciale sur une variété M est localement induite par un tel plongement $M \hookrightarrow V \times V$. Ce résultat s'interprête du point de vue des opérateurs de Monge-Ampère. Identifions pour cela (V, θ) à $(\mathbb{C}^n, \theta)$ où θ est la forme de Kähler canonique et identifions le cotangent réel de $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ via l'isomorphisme $(x, y, p, q) \mapsto (x + iy, p - iq)$. La forme Ω_1 devient alors la forme symplectique réelle naturelle sur $T^*\mathbb{C}^n$ et $\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2$ est la forme symplectique complexe. Soit $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ une fonction lisse et $df : \mathbb{C}^n \to T^*\mathbb{C}^n$ la section associée. Le graphe de df est bilagrangien si et seulement si f est pluriharmonique et il est transverse aux deux projections si et seulement si $\mathrm{hess}(f) \neq 0$. Ainsi les variétés kählériennes spéciales sont essentiellement des solutions généralisées pluriharmoniques des équations de Monge-Ampère $\mathrm{hess}(f) = 1$ ou $\mathrm{hess}(f) = -1$.

Nous nous proposons ici de formaliser cette notion d'opérateurs de Monge-Ampère pluriharmonique par une approche analogue à celle de Lychagin.

3.1. Sous-variétés lagrangiennes complexes. Les objets essentiels associés aux opérateurs pluriharmoniques sont les sous-variétés lagrangiennes complexes. En fait nous nous intéressons plus à leur propriété bilagrangienne qu'à leur structure complexe mais ce sont deux notions équivalentes comme l'a montré Hitchin dans [**Hi3**] :

PROPOSITION 1.26 (Hitchin). *Soit $(N, \Omega = \Omega_1 + i\Omega_2)$ une variété symplectique complexe de dimension complexe $2n$ et $L \subset M$ une sous-variété réelle de dimension réelle $2n$. La sous-variété L est lagrangienne complexe (i.e. $\Omega|_L = 0$ et L est une sous-variété complexe) si et seulement si L est bilagrangienne réelle i.e. $\Omega_1|_L = \Omega_2|_L = 0$.*

La structure symplectique complexe qui nous intéresse ici est celle que l'on peut définir sur le cotangent réel T^*M d'une variété complexe M : soit $z = (z_1, \ldots, z_n)$ un système de coordonnées complexes sur M et $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ le système de coordonnées réelles associé. Le cotangent réel T^*M s'identifie naturellement au cotangent holomorphe $T^*M_{\mathbb{C}}$ via l'isomorphisme

$$\Theta(x, y, p, q) = (x + iy, p - iq)$$

Cet isomorphisme permet de munir T^*M

(1) d'une structure complexe I :

$$\begin{cases} I\dfrac{\partial}{\partial x_j} = \dfrac{\partial}{\partial y_j} \\ I\dfrac{\partial}{\partial p_j} = -\dfrac{\partial}{\partial q_j} \end{cases}$$

(2) de deux formes symplectiques réelles Ω_1 et $\Omega_2 = -\Omega_1(I.,.)$:

$$\begin{cases} \Omega_1 = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dp_j + dy_j \wedge dq_j \\ \Omega_2 = \sum_{j=1}^{n} dy_j \wedge dp_j - dx_j \wedge dq_j \end{cases}$$

(3) d'une forme symplectique holomorphe $\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2$:

$$\Omega = \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge dw_j$$

avec $dz_j = dx_j + idy_j$ et $dw_j = dp_j - idq_j$.

DEFINITION 1.27. *Une fonction lisse sur $f : M \to \mathbb{R}$ est dite pluriharmonique si $(df)^*(\Omega) = 0$ où $df : M \to T^*M$ est la section du fibré cotangent associé à f.*

On note $\mathcal{H}(M)$ l'ensemble des fonctions pluriharmoniques sur M.

Puisque Ω_1 est la forme symplectique naturelle sur T^*M, $(df)^*\Omega_1 = 0$ pour toute fonction lisse f. Ainsi une fonction f est pluriharmonique si et seulement si $(df)^*(\Omega_2) = 0$ i.e.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial y_k} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial y_j} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y_k} = 0. \end{cases}$$

pour $j, k = 1, \dots, n$. Toute fonction pluriharmonique est la partie réelle d'une fonction holomorphe sur M.

Si $f : M \to \mathbb{R}$ est pluriharmonique alors l'image dans $T^*M_{\mathbb{C}}$ par Θ du graphe de df est le graphe de dF où $F : M \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe telle que $f = 2\,\mathrm{Re}(F)$. Le graphe de dF est une sous-variété lagrangienne complexe de $(T^*M_{\mathbb{C}}, \Omega_{\mathbb{C}})$ et donc le graphe de df est une sous-variété lagrangienne complexe de (T^*M, Ω). Et réciproquement toute sous-variété lagrangienne complexe de (T^*M, Ω) qui se projette bien est localement le graphe de df pour une certaine fonction pluriharmonique f. Nous retrouvons ici le résultat de Hitchin (proposition 1.26).

REMARQUE 1.28. *Les sous-variétés lagrangiennes complexes de $T^*\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^4$ sont en fait toutes lagrangiennes spéciales pour une autre structure complexe. Pour voir cela on peut identifier $\mathbb{C}^4$ à l'algèbre normée des octonions $(\mathbb{O}, \langle\ ,\ \rangle)$. C'est une algèbre non associative et non commutative de dimension 8 munie d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ compatible avec la mutiplication :*

$$\langle xy, xy \rangle = \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

pour tous $x, y \in \mathbb{O}$ (voir par exemple [**Ha**]*). Le tableau 1 donne la table de multiplication des octonions dans la base canonique $(1, i, j, k, \varepsilon, i\varepsilon, j\varepsilon, k\varepsilon)$ de $\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$.*

Tout élément X de $\mathbb{R}^8$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} X &= x_1 + p_1 i + y_1 j + q_1 k + x_2 e + p_2 i\varepsilon + y_2 j\varepsilon + q_2 k\varepsilon \\ &= [(x_1 + p_1 i) + (y_1 + q_1 i)j] + [(x_2 + p_2 i) + (y_2 + q_2 i)j]\varepsilon \\ &= [(x_1 + y_1 j) + (p_1 - q_1 j)i] + [(x_2 + y_2 j) + (p_2 - q_2)j]\varepsilon. \end{aligned}$$

$\curvearrowright$	1	i	j	k	ε	$i\varepsilon$	$j\varepsilon$	$k\varepsilon$
1	1	i	j	k	ε	$i\varepsilon$	$j\varepsilon$	$k\varepsilon$
i	i	-1	k	$-j$	$i\varepsilon$	$-\varepsilon$	$-k\varepsilon$	$j\varepsilon$
j	j	$-k$	-1	i	$j\varepsilon$	$k\varepsilon$	$-\varepsilon$	$-i\varepsilon$
k	k	j	$-i$	-1	$k\varepsilon$	$-j\varepsilon$	$i\varepsilon$	$-\varepsilon$
ε	ε	$-i\varepsilon$	$-j\varepsilon$	$-k\varepsilon$	-1	i	j	k
$i\varepsilon$	$i\varepsilon$	ε	$-k\varepsilon$	$j\varepsilon$	$-i$	-1	$-k$	j
$j\varepsilon$	$j\varepsilon$	$k\varepsilon$	ε	$-i\varepsilon$	$-j$	k	-1	$-i$
$k\varepsilon$	$k\varepsilon$	$-j\varepsilon$	$i\varepsilon$	ε	$-k$	$-j$	i	-1

TAB. 1. Table de multiplication de $\mathbb{O}$

Notons

$$\Omega_1 = dx_1 \wedge dp_1 + dy_1 \wedge dq_1 + dx_2 \wedge dp_2 + dy_2 \wedge dq_2$$

et notons (r_1, r_2, r_3, r_4) *le système de coordonnées complexe sur* $\mathbb{R}^8$ *associé à la structure complexe* i *:* $r_1 = x_1 + ip_1$, $r_2 = y_1 + iq_1$, $r_3 = x_2 + ip_2$ *et* $r_4 = y_2 + iq_2$. *La forme lagrangienne spéciale pour la structure complexe* i *est*

$$\beta = \mathrm{Im}(dr_1 \wedge dr_2 \wedge dr_3 \wedge dr_4)$$

et une sous-variété lagrangienne réelle L *de* $(\mathbb{R}^8, \Omega_1)$ *est lagrangienne spéciale (pour un bon choix d'orientation)) si et seulement si* $\beta|_L = 0$.

Soit maintenant (z_1, w_1, z_2, w_2) *le système de coordonnées complexe associé à la structure complexe* j *:* $z_1 = x_1 + iy_1$, $w_1 = p_1 - iq_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ *et* $w_2 = p_2 - jq_2$. *Soit* $\Omega = dz_1 \wedge dw_1 + dz_2 \wedge dw_2$. *On constate que*

$$\begin{cases} \Omega_1 = \mathrm{Re}(\Omega) \\ \beta = \mathrm{Im}(\Omega) \wedge (dp_1 \wedge dq_1 - dx_1 \wedge dy_1 + dp_2 \wedge dq_2 - dx_2 \wedge dy_2), \end{cases}$$

et donc toute sous-variété lagrangienne complexe de $(\mathbb{R}^8, \Omega, j)$ *est une sous-variété lagrangienne spéciale de* $(\mathbb{R}^8, \Omega_1, i)$.

3.2. Opérateurs pluriharmoniques.

DEFINITION 1.29. *Soit* M *une variété complexe de dimension complexe* n *et* $\omega \in \Omega^{2n}(T^*M)$ *une* $2n$*-forme différentielle réelle sur le cotangent* T^*M. *L'opérateur de Monge-Ampère pluriharmonique* Δ_ω *associé à* ω *est l'opérateur différentiel*

$$\Delta_\omega : \mathcal{H}(M) \to \Omega^{2n}(M)$$

défini par

$$\Delta_\omega(f) = (df)^*(\omega).$$

DEFINITION 1.30. (1) *Une solution régulière pluriharmonique de l'équation de Monge-Ampère* $\Delta_\omega = 0$ *est une fonction pluriharmonique* f *telle que* $\Delta_\omega(f) = 0$.

(2) *Une solution généralisée pluriharmonique de l'équation de Monge-Ampère* $\Delta_\omega = 0$ *est une sous-variété lagrangienne complexe* L *de* (T^*M, Ω) *telle que* $\omega|_L = 0$.

Le groupe des symplectomorphismes complexes $Sp(\Omega, \mathbb{C})$ agit de manière naturelle sur l'ensemble des opérateurs de Monge-Ampère pluriharmoniques :

$$F \cdot \Delta_\omega = \Delta_{F^*\omega}$$

et si deux opérateurs sont dans la même orbite les solutions des équations associées le sont également :

PROPOSITION 1.31. *Soit F un symplectomorphisme de la variéte symplectique complexe (T^*M, Ω) et Δ_ω un opérateur de Monge-Ampère pluriharmonique.*

L est une solution généralisée de $\Delta_{F^*\omega} = 0$ si et seulement si $F(L)$ est une solution généralisée de $\Delta_\omega = 0$.

Nous montrons plus loin un théorème de décomposition analogue au théorème de décomposition de Hodge-Lepage-Lychagin (théorème 1.19). Essentiellement nous montrons que toute forme $\omega \in \Omega^{2n}(T^*M)$ se décompose

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 \wedge \Omega_1 + \omega_2 \wedge \Omega_2,$$

ω_0 étant bieffective (i.e. $\omega_0 \wedge \Omega_1 = \omega_0 \wedge \Omega_2 = 0$) et uniquement déterminée. Puisque du point de vue des opérateurs pluriharmoniques,

$$\Delta_\omega = \Delta_{\omega_0}$$

on a une correspondance entre opérateurs pluriharmoniques et formes bieffectives. Cette correspondance n'est à priori pas biunivoque mais nous montrerons dans la deuxième partie de cette thèse sur quelques exemples comment elle permet d'une part de distinguer simplement deux équations de Monge-Ampère qui n'ont pas même solutions pluriharmoniques et comment elle permet d'autre part de décrire précisément la grassmannienne des solutions pluriharmoniques d'une équation de Monge-Ampère donnée.

CHAPITRE 2

Géométrie des formes effectives

Il ne faut pour définir l'algèbre extérieure d'un espace vectoriel donné que quelques outils simples d'algèbre linéaire. Mais la complexité des calculs explicites et la taille très vite gigantesque des espaces étudiés font que cet objet reste relativement mystérieux aujourd'hui, certains le qualifiant même de "sauvage".

Cependant, en petites dimensions les calculs restent raisonnables ou tout du moins informatisables. Ainsi par exemple l'action du groupe $Sp(3)$ sur $\Lambda^3_\varepsilon(\mathbb{R}^6)$ est maintenant bien comprise. Les orbites génériques sont de codimension 1 et il est possible de dresser une liste exhaustive de toutes les orbites. Cela nous permet de classifier les équations de Monge-Ampère en dimension 3 : on peut dire si deux telles équations sont essentiellement différentes ou si elles ne sont que deux expressions d'un même phénomène.

Il y a une dualité naturelle entre formes extérieures et sous-espaces vectoriels : les formes de degré k sont aux sous-espaces de codimension k ce que les formes linéaires sont aux hyperplans. Ainsi, comprendre l'algèbre extérieure d'un espace vectoriel, c'est comprendre l'organisation de ses sous-espaces et c'est pourquoi beaucoup de structures géométriques sont encodées dans cette algèbre extérieure. Par exemple, une structure complexe sur notre espace vectoriel peut être vue comme une forme symplectique dans notre algèbre extérieure. Cette approche plus globale donne un autre éclairage sur les équations de Monge-Ampère. Ces équations sont l'expression locale d'une certaine structure géométrique sur l'espace ambiant et la théorie des opérateurs de Monge-Ampère permet de reconstruire cette structure à partir d'une équation donnée.

Le but de ce chapitre est de concilier ces deux points de vue pour avoir une compréhension géométrique plus complète des équations de Monge-Ampère. Nous avons pris le parti de traiter les calculs les plus difficiles en annexe pour que le lecteur ne perde pas le fil de la démonstration. Nous avons cependant conscience que l'étude systématique des formes extérieures peut paraître peu intuitive et trop technique mais nous pensons que les interprétations géométriques qui en découleront la justifient.

Nous dressons tout d'abord une liste exhaustive des différentes orbites de l'action du groupe $Sp(3)$ sur $\Lambda^3_\varepsilon(\mathbb{R}^6)$. Nous prenons ensuite un peu de recul pour mieux comprendre cette action et les invariants associés. Dans une troisième partie nous introduisons la notion de forme bieffective et effectuons une petite incursion dans le monde des 4-formes.

1. Classification symplectique des 3-formes effectives

Nous dressons dans cette partie la liste de toutes les orbites de l'action du groupe symplectique $Sp(3)$ sur l'espace des formes effectives $\Lambda^3_\varepsilon(\mathbb{R}^6)$. Nous complétons en fait une liste proposée par Lychagin et Roubtsov ([**LR2**]) et dans laquelle manquait une famille d'orbite, la famille "lagrangienne spéciale".

La classification complexe correspondante a été obtenue par Igusa ([**I**]) et Popov ([**Po**]) mais nous adoptons une autre approche pour le cas réel. La démonstration se fait en quelque sorte par récurrence. Nous partons de la classification bien connue des 2-formes effectives en dimension 4 (proposition 2.1) et nous appliquons la formule de récurrence 1.21 en fixant une décomposition canonique pour chaque forme en utilisant l'invariant de Lychagin-Roubtsov.

Nous commençons par rappeler ce qu'est cet invariant et en donnons quelques propriétés remarquables. Nous énoncons et démontrons ensuite le théorème de classification symplectique des 3-formes effectives. Nous calculons enfin le stabilisateur des orbites les plus représentatives (du point vue des opérateurs de Monge-Ampère) et leur prolongation. Nous montrons en fait que cette prolongation est toujours nulle. Nous utiliserons ce résultat au chapitre 3 pour construire des obstructions à l'équivalence locale de deux équations de Monge-Ampère.

PROPOSITION 2.1. *Soit* (W^4,Ω) *un espace vectoriel symplectique de dimension* 4 *et* $\omega \in \Lambda^2_\varepsilon(W^*)$ *une* 2*-forme effective sur* V*. Notons* $\mathrm{pf}(\omega)$ *le pfaffien de* ω *défini par*

$$\mathrm{pf}(\omega) = \frac{\omega\wedge\omega}{\Omega\wedge\Omega}.$$

Il existe une base symplectique (e_1,e_2,f_1,f_2) *de* (W,Ω) *dans laquelle* ω *s'écrit*

(1) $\omega = \lambda(e_1^*\wedge e_2^* - f_1^*\wedge f_2^*)$ *si* ω *est elliptique (*$\mathrm{pf}(\omega)>0$*),*

(2) $\omega = \lambda(e_1^*\wedge e_2^* + f_1^*\wedge f_2^*)$ *si* ω *est hyperbolique (*$\mathrm{pf}(\omega)<0$*),*

(3) $\omega = e_1^*\wedge e_2^*$ *si* ω *est parabolique (*$\mathrm{pf}(\omega)=0$*).*

Fixons maintenant un espace vectoriel symplectique (V,Ω) de dimension 6. Rappelons que $\Lambda^3_\varepsilon(V^*)$ désigne l'espace des 3-formes effectives sur (V,Ω). Nous noterons Ω_A la contraction de Ω par un vecteur A et plus généralement $\omega_X = i_X(\omega)$ pour $X\in V$ et $\omega\in\Lambda^k(V^*)$.

1.1. L'invariant quadratique de Lychagin-Roubtsov.

DEFINITION 2.2. *L'invariant quadratique de Lychagin et Roubtsov associé à une forme effective* $\omega\in\Lambda^3_\varepsilon(V^*)$ *est la forme quadratique* $q_\omega\in S^2(V^*)$ *définie par*

$$q_\omega(X) = -\frac{1}{4}\perp^2(\omega_X\wedge\omega_X).$$

q_ω est un invariant pour l'action du groupe symplectique $Sp(3)$ au sens suivant : si $F\in Sp(3)$ alors

$$q_{F^*\omega}(FX) = q_\omega(F^{-1}X).$$

Cet invariant nous donne en fait les racines (éventuellement complexes) du polynôme caractéristique $P_{\omega_X}(\xi) = \frac{(\omega_X-\xi\Omega)^3}{\Omega^3}$ de ω_X,

$$P_{\omega_X}(\xi) = \xi(\xi-\sqrt{q_\omega(X)})(\xi+\sqrt{q_\omega(X)}).$$

Nous avons vu (1.21) que pour toute 3-forme effective ω sur V et tout couple de vecteurs $(A,B)\in V\times V$ tel que $\Omega(A,B)=1$, il existe un unique triplet de formes $(\omega_0,\omega_1,\omega_2)\in V^*\times\Lambda^2_\varepsilon(W^*)\times\Lambda^2_\varepsilon(W^*)$ vérifiant la relation

$$\omega = (\Omega_A\wedge\Omega_B - \Omega')\wedge\omega_0 + \Omega_A\wedge\omega_1 + \Omega_B\wedge\omega_2,$$

Ω' désignant la restriction de Ω à l'orthognal symplectique W de $\mathbb{R}A\oplus\mathbb{R}B$. Nous parlerons par la suite de *décomposition symplectique* $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ *de* ω *associée au triplet* (A, B, W). Cet invariant q_ω nous donne des informations sur une telle décomposition. En effet

$$\begin{cases} \omega_2 \wedge \omega_2 = -q_\omega(A)\Omega' \wedge \Omega' \\ \omega_1 \wedge \omega_2 = q_\omega(A, B)\Omega' \wedge \Omega' \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} \omega_2 \text{ est non dégénérée sur } W \ \Leftrightarrow q_\omega(A) \neq 0 \\ \omega_1 \wedge \omega_2 = 0 \Leftrightarrow q_\omega(A, B) = 0 \end{cases}$$

(nous notons aussi q_ω la forme bilinéaire symétrique associée à q_ω).

Grâce à cet invariant, nous pouvons choisir A et B pour lesquels la décomposition $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ de ω est "canonique" comme l'explique la proposition suivante.

PROPOSITION 2.3. *Soit* $\omega \in \Lambda^3_\varepsilon(V^*)$ *une forme effective dont l'invariant de Lychagin-Roubtsov n'est pas identiquement nul sur* V. *Il existe deux vecteurs* A *et* B *de* V *et un couple* (ω_1, ω_2) *de formes effectives sur le sous-espace symplectique* (W, Ω') *de* (V, Ω) *orthogonal à* $\mathbb{R}A \oplus \mathbb{R}B$ *telles que*

$$\begin{cases} \omega = \Omega_A \wedge \omega_1 + \Omega_B \wedge \omega_2 \\ \omega_1 \wedge \omega_2 = 0 \\ \omega_1 \wedge \omega_1 \neq 0. \end{cases}$$

Démonstration. Choisissons $A \in V$ tel que $q_\omega(A) \neq 0$. Notons E_A le noyau de l'application $\omega_A : V \to V^*$. Remarquons tout d'abord que E_A est de dimension 2. En effet soit un supplémentaire Z de E_A. La forme ω_A est non dégénérée sur Z donc Z est de dimension paire. De plus $\omega_A \wedge \omega_A \in \Lambda^4(Z^*)$ est non nulle donc Z est de dimension au moins 4. Ainsi E_A est de dimension paire et au plus 2. Comme $A \in E_A$, E_A est de dimension 2.

Montrons maintenant qu'il existe $B_0 \in E_A$ tel que $\Omega(A, B_0) = 1$. Soit $B \in V$ tel que $\Omega(A, B) = 1$ et soit W l'orthogonal symplectique de $\mathbb{R}A \oplus \mathbb{R}B$. Soit $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ la décomposition symplectique de ω associée à (A, B, W). Choisissons $B_1 \in E_A$ tel que $A \wedge B_1 \neq 0$ et écrivons B_1 sous la forme

$$B_1 = D + \alpha A + \beta B,$$

avec $D \in W$. Supposons par l'absurde que $\beta = 0$. De

$$\omega = (\Omega_A \wedge \Omega_B - \Omega') \wedge \omega_0 + \Omega_A \wedge \omega_1 + \Omega_B \wedge \omega_2,$$

il vient

$$0 = i_{A\wedge B_1}\omega = i_D\omega_2 - \Omega_A \wedge i_{B_1}\omega_0.$$

et donc $i_D\omega_2 = 0$. Or ω_2 est non dégénérée sur W puisque $q_\omega(A) \neq 0$. Donc $D = 0$ et nécessairement $B_1 = \alpha A$, ce qui contredit notre hypothèse initiale. Finalement $B_0 = \frac{1}{\beta}B_1 \in E_A$ et vérifie $\Omega(A, B_0) = 1$.

Soit alors $B_2 = B_0 + tA$ avec $t = -\frac{q_\omega(A,B_0)}{q_\omega(A)}$. Soit $(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ la décomposition symplectique associée à (A, B_2). Puisque $i_{A\wedge B_2} = 0$, nécessairement $\theta_0 = 0$. De plus $q_\omega(A, B_2) = 0$ donc $\theta_1 \wedge \theta_2 = 0$. Le couple (A, B_2) convient donc. □

Le cas des formes vérifiant $q_\omega = 0$ est plus simple. Elles sont en fait toutes dans la même orbite. Montrons tout d'abord un petit lemme préliminaire avant de montrer cette assertion.

LEMME 2.4. *Si $\omega \in \Lambda^3_\varepsilon(V^*)$ vérifie $\omega \wedge \omega_X = 0$ pour tout $X \in V$ alors il existe $Y \in V - \{0\}$ tel que $\omega_Y = 0$.*

Démonstration. Soit A un vecteur non nul de V. De $\omega \wedge \omega_A = 0$ il vient $\omega_A \wedge \omega_A = 0$. La 2-forme ω_A est donc décomposable et E_A est donc de dimension au moins 4. Il existe alors B tel que $\Omega(A, B) = 1$ et $\omega_{A\wedge B} = 0$. Soit W l'orthogonal symplectique de $\mathbb{R}A \oplus \mathbb{R}B$ et $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ la décomposition symplectique de ω associée à (A, B, W). Puisque $\omega_{A\wedge B} = 0$, nécessairement $\omega_0 = 0$. De plus comme $\omega_A \wedge \omega_A = 0$, nécessairement $q_\omega(A) = 0$ et donc ω_1 est une 2-forme décomposable sur W : $\omega_1 = \Omega_{U_1} \wedge \Omega_{V_1}$ avec U_1 et $V_1 \in W$. De la même façon $\omega_2 = \Omega_{U_2} \wedge \Omega_{V_2}$ avec U_2 et $V_2 \in W$. Comme ω_1 et ω_2 sont effectives, on déduit que

$$\Omega(U_1, V_1) = \Omega(U_2, V_2) = 0.$$

Ainsi ω s'écrit

$$\omega = \Omega_A \wedge \Omega_{U_1} \wedge \Omega_{V_1} + \Omega_B \wedge \Omega_{U_2} \wedge \Omega_{V_2}.$$

Si $\omega_{U_1} = 0$ la preuve est finie. Sinon, comme

$$\omega_{U_1} = \Omega(U_1, U_2)\Omega_B \wedge \Omega_{V_2} + \Omega(V_2, U_1)\Omega_B \wedge \Omega_{U_2},$$

on peut supposer que $\Omega(U_1, U_2) \neq 0$. Soit alors

$$V_2' = V_2 - \frac{\Omega(V_2, U_1)}{\Omega(U_1, U_2)} U_2.$$

De $\Omega(U_1, V_2') = 0$, il vient $\Omega_{U_1} = \Omega(U_2, V_2')\Omega_B \wedge \Omega_{V_2'}$. Or $\omega \wedge \omega_{A_1} = 0$, d'où

$$\Omega_{U_1} \wedge \Omega_{V_1} \wedge \Omega_{V_2'} = 0$$

et donc

$$\Omega(U_1, V_2') = \Omega(U_2, V_2') = \Omega(V_1, V_2') = 0.$$

On en déduit donc que $\omega_{V_2'} = 0$. □

PROPOSITION 2.5. *Soit $\omega \in \Lambda^3_\varepsilon(V^*)$ une 3-forme effective dont l'invariant de Lychagin-Roubtsov est identiquement nul sur V. Si ω est non nulle il existe une base symplectique $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$ de V dans laquelle*

$$\omega = f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*.$$

Démonstration. Pour tous X et $Y \in V$, $\perp^2(\omega_X \wedge \omega_Y) = 0$. D'après 1.14, on sait que

$$[\perp^2, \top](\theta) = 0$$

pour toute 4-forme θ. Ainsi, pour tous X et $Y \in V$,

$$\perp^2 \top(\omega_X \wedge \omega_Y) = \top \perp^2(\omega_X \wedge \omega_Y) = 0.$$

Mais $\perp : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k-2}(V^*)$ est injective pour $k \geq 4$. Donc $\Omega \wedge \omega_X \wedge \omega_Y = 0$ pour tous $X, Y \in V$. Or $\omega \wedge \Omega = 0$ donc $\Omega_Y \wedge \omega = \Omega \wedge \omega_Y$. Ainsi $\Omega_Y \wedge \omega \wedge \omega_X = 0$ pour tous $X, Y \in V$ et donc $\omega \wedge \omega_X = 0$ pour tous $X \in V$. D'après le lemme précédent il existe $A \in V - \{0\}$ tel que $\omega_A = 0$. Soit alors $B \in V$ tel que $\Omega(A, B) = 1$ et $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ la décomposition symplectique de ω associée à (A, B). Comme $\omega_A = 0$, nécessairement ω_0 et ω_2 sont nulles. Ainsi

$$\omega = \omega_1 \wedge \Omega_A.$$

Or $q_\omega(A) = 0$. Donc ω_1 est décomposable. La proposition est démontrée. □

1.2. Le théorème de classification. Soit $\omega \in \Lambda^3_\varepsilon(V^*)$ telle que $q_\omega \neq 0$. Choisissons (A, B, W) comme dans la proposition 2.3 :

$$\omega = \Omega_A \wedge \omega_1 + \Omega_B \wedge \omega_2,$$

ω_1 et ω_2 étant effectives sur l'espace symplectique (W, Ω') et Ω' et ω_2 étant effectives sur l'espace symplectique (W, ω_1).

Ω' étant non dégénérée, Ω' est nécessairement elliptique ou hyperbolique sur (W, ω_1). La forme ω_2 peut être par contre elliptique, hyperbolique, parabolique ou même nulle. Une étude systématique de ces huit cas nous donne la liste complète de toutes les orbites possibles. Cette étude est un peu longue et répétitive, aussi nous ne donnons les détails que pour un seul cas [1] qui nous semble le plus exemplaire : Ω' et ω_2 sont elliptiques sur (W, ω_1).

Puisque ω_2 est elliptique sur (W, ω_1), d'après le théorème de classification des 2-formes effectives (proposition 2.1), il existe une base (a_1, a_2, b_1, b_2) de W dans laquelle

$$\begin{cases} \omega_1 = a_1^* \wedge b_1^* + a_2^* \wedge b_2^* \\ \omega_2 = \lambda(a_1^* \wedge b_2^* - a_2^* \wedge b_1^*). \end{cases}$$

Comme $\Omega' \wedge \omega_1 = \Omega' \wedge \omega_2 = 0$, il existe quatre réels p, q, r, s tels que

$$\Omega' = pa_1^* \wedge a_2^* + qb_1^* \wedge b_2^* + r(a_1^* \wedge b_2^* + a_2^* \wedge b_1^*) + s(a_1^* \wedge b_1^* - a_2^* \wedge b_2^*).$$

De plus $pq + r^2 + s^2 < 0$ puisque Ω' est elliptique. En particulier, p et q ne peuvent être nuls. Soit A_t et B_t les transformations dépendant du paramètre réel t définies dans la base duale $(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$ par

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A_t et B_t laissent invariantes ω_1, ω_2 et agissent sur Ω de la façon suivante

$$\begin{cases} (p, q, r, s) \xrightarrow{A_t} (p - qt^2 - 2st, q, r, s + qt) \\ (p, q, r, s) \xrightarrow{B_t} (p - qt^2 + 2rt, q, r, r - qt). \end{cases}$$

Appliquons alors la transformation B_u puis la transformation A_v avec $u = -\frac{r}{q}$ et $v = -\frac{s}{q}$. Dans la nouvelle base on obtient

$$\begin{cases} \omega_1 = a_1^* \wedge b_1^* + a_2^* \wedge b_2^*, \\ \omega_2 = \lambda(a_1^* \wedge b_2^* - a_2^* \wedge b_1^*), \quad \lambda \neq 0, \\ \Omega' = pa_1^* \wedge a_2^* + qb_1^* \wedge b_2^*, \quad pq < 0. \end{cases}$$

Après avoir appliqué la transformation (qui laisse invariantes ω_1 et ω_2)

$$F = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

[1] voir Annexe A pour les autres

avec $e^{4t} = -\frac{q}{p} > 0$, on obtient l'expression suivante pour Ω'

$$\Omega' = \mu(a_1^* \wedge a_2^* - b_1^* \wedge b_2^*)$$

Soit la base symplectique $(c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3)$ de (V, Ω) définie par

$$\begin{cases} c_1 = B, & d_1 = -A \\ c_2 = \dfrac{1}{\mu} a_1, & d_2 = a_2 \\ c_3 = \dfrac{1}{\mu} b_1, & d_3 = -b_2. \end{cases}$$

Dans cette base $\omega = \Omega_A \wedge \omega_1 + \Omega_B \wedge \omega_2$ s'écrit

$$\omega = \frac{1}{\mu^2} c_1^* \wedge c_2^* \wedge c_3^* - c_1^* \wedge d_2^* \wedge d_3^* + \frac{\lambda}{\mu} c_2^* \wedge d_1^* \wedge d_3^* - \frac{\lambda}{\mu} c_3^* \wedge d_1^* \wedge d_2^*.$$

Posons alors $\frac{\mu}{\lambda} = \varepsilon\nu^2$ avec $\varepsilon = \pm 1$ et définissons la nouvelle base symplectique $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$ de (V, Ω) par

$$\begin{cases} e_1 = -\mu c_1, & f_1 = -\frac{1}{\mu} d_1 \\ e_2 = \mu\nu c_2, & f_2 = \frac{1}{\mu\nu} d_2 \\ e_3 = \nu d_3, & f_3 = -\frac{1}{\nu} c_3. \end{cases}$$

Nous obtenons finalement l'expression suivante de ω

$$\omega = e_1^* \wedge e_2^* \wedge f_3^* - e_1^* \wedge e_3^* \wedge f_2^* + \varepsilon e_2^* \wedge e_3^* \wedge f_1^* - \varepsilon\xi^2 f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*.$$

En étudiant ainsi tous les cas possibles on obtient alors le théorème

THEOREME 2.6. *Soit $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$ une base symplectique d'un espace vectoriel symplectique de dimension 6. Toute 3-forme effective est dans une et une seule des $Sp(3)$-orbites décrites dans la table 1.*

	ω	q_ω	$\varepsilon(q_\omega)$
1	$e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + \gamma f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*, \gamma \neq 0$	$\frac{\gamma}{2}(e_1^* f_1^* + e_2^* f_2^* + e_3^* f_3^*)$	$(3,3)$
2	$f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* - f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^*$ $+ f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* - \nu^2 f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*, \nu \neq 0$	$-(e_1^*)^2 - (e_2^*)^2 - (e_3^*)^2$ $+\nu^2(-(f_1^*)^2 - (f_2^*)^2 - (f_3^*)^2)$	$(0,6)$
3	$f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^*$ $+ f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + \nu^2 f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*, \nu \neq 0$	$(e_1^*)^2 - (e_2^*)^2 + (e_3^*)^2$ $+\nu^2((f_1^*)^2 - (f_2^*)^2 + (f_3^*)^2)$	$(4,2)$
4	$f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* - f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^*$	$-(e_1^*)^2 - (e_2^*)^2 - (e_3^*)^2$	$(0,3)$
5	$f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^*$	$(e_1^*)^2 - (e_2^*)^2 + (e_3^*)^2$	$(2,1)$
6	$f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^*$	$(e_1^*)^2$	$(1,0)$
7	$f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* - f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^*$	$-(e_1^*)^2$	$(0,1)$
8	$f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*$	0	$(0,0)$
9	0	0	$(0,0)$

TAB. 1. Classification des 3-formes effectives en dimension 6

REMARQUE 2.7. *Ce théorème dit que deux formes effectives données non nulles sont dans la même orbite pour l'action du groupe $Sp(3)$ si et seulement les invariants de Lychagin-Roubtsov associés ont même déterminant et même signature.*

COROLLAIRE 2.8. *Toute équation de Monge-Ampère symplectique (en trois variables) et à coefficients constants peut être transformée par un changement de variable linéaire symplectique en une et une seule des équations suivantes*

$$\mathrm{hess}(f) = 1$$
$$\Delta f - \mathrm{hess}(f) = 0$$
$$\Box f + \mathrm{hess}(f) = 0$$
$$\Delta f = 0$$
$$\Box f = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0$$

REMARQUE 2.9. *On constate ainsi en regardant chacune des orbites qu'une EMAS à coefficients constants $\Delta_\omega = 0$ est non linéarisable si et seulement si q_ω est non dégénérée. Cette remarque nous donne une condition nécessaire pour qu'une équation de Monge-Ampère symplectique $\Delta_\omega = 0$ à coefficients lisse soit linéarisable : il faut que q_ω soit partout dégénérée.*

1.3. Les stabilisateurs des orbites principales et leur prolongation. Nous nous intéressons maintenant aux trois familles d'orbites "non dégénérées"

$$\begin{cases} e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + \gamma f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*, \gamma \neq 0 \\ f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* - f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* - \nu^2 f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*, \nu \neq 0 \\ f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + \nu^2 f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*, \nu \neq 0. \end{cases}$$

Nous verrons plus loin comment Hitchin a donné un sens précis à cette notion de 3-forme non dégénérée. Nous gardons pour l'instant à l'esprit que ces trois familles d'orbites correspondent aux équations qui sont "réellement" de Monge-Ampère, c'est à dire non linéarisables.

Nous commençons par calculer le stabilisateur de chacune de ces familles d'orbites. Rappelons que l'action du groupe de Lie $Sp(3)$ sur $\Lambda^3_\varepsilon(V^*)$ induit l'action infinitésimale de l'algèbre de Lie $sp(3)$ définie par

$$X \cdot \omega = L_X(\omega),$$

pour $X \in sp(3)$ et $\omega \in \Lambda^3_\varepsilon(V^*)$. Le stabilisateur d'une forme effective ω est alors la sous-algèbre de Lie de $sp(3)$

$$\mathcal{G}_\omega = \{X \in sp(3) : L_X(\omega) = 0\},$$

et s'identifie à l'espace tangent $T_I G_\omega$ où

$$G_\omega = \{F \in Sp(3) : F^*\omega = \omega\}.$$

Un calcul direct(effectué à l'aide de Maple V) nous donne la proposition suivante

PROPOSITION 2.10. *Les stabilisateurs des trois familles d'orbites non dégénérées sont*

(1) $\omega = e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + \gamma f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*$, $\gamma \neq 0$

$$\mathcal{J}_\omega = \left\{ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B^t \end{pmatrix} : B \in sl(3, \mathbb{R}) \right\};$$

(2) $\omega = f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* - f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* - \nu^2 f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*$, $\nu \neq 0$

$$\mathcal{J}_\omega = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \lambda_1 & \xi_1 & \xi_2 \\ -\alpha & 0 & \gamma & \xi_1 & \lambda_2 & \xi_3 \\ -\beta & -\gamma & 0 & \xi_2 & \xi_3 & \lambda_3 \\ -\nu^2\lambda_1 & -\nu^2\xi_1 & -\nu^2\xi_2 & 0 & \alpha & \beta \\ -\nu^2\xi_1 & -\nu^2\lambda_2 & -\nu^2\xi_3 & -\alpha & 0 & \gamma \\ -\nu^2\xi_2 & -\nu^2\xi_3 & -\nu^2\lambda_3 & -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \right\} ;$$

(3) $\omega = f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + \nu^2 f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*$, $\nu \neq 0$

$$\mathcal{J}_\omega = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \lambda_1 & \xi_1 & \xi_2 \\ \alpha & 0 & \gamma & \xi_1 & \lambda_2 & \xi_3 \\ -\beta & \gamma & 0 & \xi_2 & \xi_3 & \lambda_3 \\ -\nu^2\lambda_1 & \nu^2\xi_1 & -\nu^2\xi_2 & 0 & -\alpha & \beta \\ \nu^2\xi_1 & -\nu^2\lambda_2 & \nu^2\xi_3 & -\alpha & 0 & -\gamma \\ -\nu^2\xi_2 & \nu^2\xi_3 & -\nu^2\lambda_3 & -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} : \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \right\} ;$$

Nous nous proposons maintenant de calculer les prolongations de ces trois algèbres de Lie. Rappelons que si $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie de matrices, i.e. $\mathcal{G} \subset V \otimes V^*$, sa première prolongation est définie par

$$\mathcal{G}^{(1)} = \{T \in Hom(V, \mathcal{G}) : T(u).v = T(v).u\}$$

(voir par exemple [**GS1**]). On définit ensuite par récurrence $\mathcal{G}^{(k)} = (\mathcal{G}^{(k-1)})^{(1)}$. Ainsi

$$\begin{cases} \mathcal{G}^{(1)} = \Big(V \otimes S^2(V^*)\Big) \cap \Big(\mathcal{G} \otimes V^*\Big) \\ \mathcal{G}^{(k)} = \Big(V \otimes S^{k+1}(V^*)\Big) \cap \Big(\mathcal{G} \otimes S^k(V^*)\Big). \end{cases}$$

L'algèbre de Lie graduée

$$\mathcal{G}^{(*)} = \mathcal{G}^{(-1)} \oplus \mathcal{G}^{(0)} \oplus \mathcal{G}^{(1)} \oplus \cdots \oplus \mathcal{G}^{(k)} \oplus \cdots$$

avec $\mathcal{G}^{(-1)} = V$ et $\mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{G}$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie graduée des champs de vecteurs sur V à coefficients polynomiaux

$$V \oplus \Big(V \otimes V^*\Big) \oplus \Big(V \otimes S^2(V^*)\Big) \oplus \cdots \oplus \Big(V \otimes S^k(V^*)\Big) \oplus \cdots$$

Dans le cas qui nous intéresse ici, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_\omega$ est une sous-algèbre de Lie de

$$sp(3) = \left\{ \begin{pmatrix} B & A \\ C & -B^t \end{pmatrix} : A \text{ et } C \text{ symétriques} \right\}.$$

Un élément $\theta \in sp(3) \otimes V^* \subset V \otimes V^* \otimes V^*$ peut s'écrire comme suit

$$\theta = \sum_{i,j,k=1}^{3} b_{ij}^k e_i \otimes e_j^* \otimes e_k^* + a_{ij}^k e_i \otimes f_j^* \otimes e_k^* + c_{ij}^k f_i \otimes e_j^* \otimes e_k^* - b_{ji}^k f_i \otimes f_j^* \otimes e_k^*$$
$$+ b_{ij}^{k+3} e_i \otimes e_j^* \otimes f_k^* + a_{ij}^{k+3} e_i \otimes f_j^* \otimes f_k^* + c_{ij}^{k+3} f_i \otimes e_j^* \otimes f_k^* - b_{ji}^{k+3} f_i \otimes f_j^* \otimes f_k^*$$

avec $\begin{pmatrix} B_k & A_k \\ C_k & -B_k^t \end{pmatrix} \in sp(3)$ pour $k = 1, \ldots, 6$. Et donc

$$\theta \in \Big(sp(3) \otimes V^*\Big) \cap \Big(V \otimes S^2(V^*)\Big)$$

si et seulement si les égalités suivantes sont vérifiées pour $i, j, k = 1, \ldots, 3$

$$\begin{aligned} b_{ij}^k &= b_{ik}^j, \\ c_{ij}^k &= c_{ik}^j, \\ a_{ij}^{k+3} &= -a_{ik}^{j+3}, \\ b_{ji}^{k+3} &= b_{ki}^{j+3}, \\ b_{ij}^{k+3} &= a_{ik}^j, \\ b_{ki}^j &= -c_{ij}^{k+3}. \end{aligned}$$

Ces relations nous permettent de vérifier que $\mathcal{G}_\omega^{(1)}$ est nulle pour chacune des trois orbites non dégénérées.

PROPOSITION 2.11. *Soit $\omega \in \Lambda^3_\varepsilon(V^*)$ une forme effective appartenant à l'une des trois orbites non dégénérées. Alors*

$$\mathcal{G}_\omega^{(1)} = 0.$$

Les différents calculs effectués dans cette partie sont résumés dans le tableau 2.

$\Delta_\omega = 0$	$\mathcal{G}_\omega$	$\mathcal{G}_\omega^{(1)}$
$\mathrm{hess}(f) = 1$	$sl(3, \mathbb{R})$	0
$\Delta f - \mathrm{hess}(f) = 0$	$su(3)$	0
$\Box f + \mathrm{hess}(f) = 0$	$su(2,1)$	0

TAB. 2. Stabilisateurs des 3-formes effectives non dégénérées et leur prolongation

2. L'approche de Hitchin

Dans son article *The Geometry of* 3*-forms in six and seven dimensions* ([**Hi3**]), Hitchin s'est intéressé à l'action du groupe $SL(6, \mathbb{R})$ sur $\Lambda^3(\mathbb{R}^6)$. Sa motivation était de caractériser les formes différentielles sur une variété de dimension 6 à partir desquelles on peut éventuellement construire une structure de Calabi-Yau. Il a donné un sens à la notion de 3-forme non dégénérée et défini un invariant associé à chacune de ses 3-formes qui est soit une structure produit soit une structure complexe dans le cas non dégénéré. Nous nous proposons dans cette partie de montrer comment les résultats de Hitchin s'appliquent aux formes effectives et complètent ainsi l'approche de Lychagin et Roubtsov.

Nous commencons par rappeler les résultats de Hitchin. Nous étudions ensuite le cas des formes effectives et montrons comment l'invariant de Hitchin et celui de Lychagin-Roubtsov coïncident. Nous construisons enfin une structure de Kähler "exotique" sur l'espace $\Lambda^4(\mathbb{R}^8)$ en s'inspirant de l'approche de Hitchin.

2.1. 3-formes non dégénérées au sens de Hitchin. Soit V un espace vectoriel réel de dimension 6 et $\Lambda^k(V^*)$ l'espace des k-formes extérieures sur V. Fixons $\theta \in \Lambda^6(V^*)$ une forme volume sur V. Notons $A : \Lambda^5(V^*) \to V \otimes \Lambda^6(V^*)$ l'isomorphisme induit par le produit extérieur. L'invariant de Hitchin associé à une forme $\omega \in \Lambda^3(V^*)$ est l'endomorphisme $K^\theta_\omega : V \to V$ défini par

$$K^\theta_\omega(X)\theta = \frac{A(i_X\omega \wedge \omega)}{\theta}.$$

DEFINITION 2.12. *Le pfaffien de Hitchin d'une 3-forme $\omega \in \Lambda^3(V^*)$ est*

$$\lambda_\theta(\omega) = \frac{1}{6}Tr(K^\theta_\omega \circ K^\theta_\omega).$$

Une 3-forme ω est dite non dégénérée (au sens de Hitchin) si et seulement si $\lambda_\theta(\omega)$ est non nul.

LEMME 2.13 (Hitchin). *Soit $\omega \in \Lambda^3(V^*)$ une forme non dégénérée au sens de Hitchin. Alors*

$$K^\theta_\omega \circ K^\theta_\omega = \lambda_\theta(\omega)Id.$$

PROPOSITION 2.14 (Hitchin). *Soit $\omega \in \Lambda^3(V^*)$ une 3-forme non dégénérée.*

(1) $\lambda_\theta(\omega) > 0$ si et seulement si $\omega = \alpha + \beta$ où α et β sont des formes réelles décomposables sur V. De plus si on impose $\frac{\alpha\wedge\beta}{\theta} > 0$ alors α et β sont uniquement déterminées :

$$\begin{cases} 2\alpha = \omega + |\lambda_\theta(\omega)|^{-\frac{3}{2}}(K^\theta_\omega)^*(\omega) \\ 2\beta = \omega - |\lambda_\theta(\omega)|^{-\frac{3}{2}}(K^\theta_\omega)^*(\omega) \end{cases}$$

(2) $\lambda_\theta(\omega) < 0$ si et seulement si $\omega = \alpha + \overline{\alpha}$ où $\alpha \in \Lambda^3(V^* \otimes \mathbb{C})$ est une forme complexe décomposable sur V. Si l'on impose de plus que $\frac{\alpha\wedge\overline{\alpha}}{i\theta} > 0$ alors α est uniquement déterminée :

$$\alpha = \omega + i|\lambda_\theta(\omega)|^{-\frac{3}{2}}(K^\theta_\omega)^*(\omega).$$

REMARQUE 2.15. *Fixons une base $(e_1, \dots, e_6)$ de V et soit $(e_1^*, \dots, e_6^*)$ sa base duale. Fixons $\theta = e_1^* \wedge \dots \wedge e_6^*$.*

(1) $\lambda_\theta(\omega) > 0$ si et seulement si ω est dans la $GL(V)$-orbite de

$$e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + e_4^* \wedge e_5^* \wedge e_6^*.$$

(2) $\lambda_\theta(\omega) < 0$ si et seulement si ω est dans la $GL(V)$-orbite de

$$(e_1^* + ie_4^*) \wedge (e_2^* + ie_5^*) \wedge (e_3^* + ie_6^*) + (e_1^* - ie_4^*) \wedge (e_2^* - ie_5^*) \wedge (e_3^* - ie_6^*).$$

L'action de $GL(V)$ sur $\Lambda^3(V^*)$ a ainsi deux orbites ouvertes séparées par l'hypersurface $\{\lambda_\theta = 0\}$. Ceci justifie la terminologie de "3-forme non dégénérée en dimension 6". C'est une généralisation naturelle de la notion de 2-forme non dégénérée sur $\mathbb{R}^4$: l'action de $GL(4, \mathbb{R})$ sur $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ a deux orbites ouvertes séparées par l'hypersurface $\{\mathrm{pf} = 0\}$.

L'unicité de la décomposition en somme de deux formes décomposables (à choix d'orientation près) permet d'associer une forme duale $\hat{\omega}$ à toute forme non dégénérée ω :

DEFINITION 2.16 (Hitchin). *(1) Si $\lambda_\theta(\omega) > 0$ et $\omega = \alpha + \beta$ alors $\hat{\omega} = \alpha - \beta$.*

(2) Si $\lambda_\theta(\omega) < 0$ *et* $\omega = \alpha + \overline{\alpha}$ *alors* $\hat{\omega} = i(\overline{\alpha} - \alpha)$.

2.2. L'action hamiltonienne de $Sp(3)$ sur $\Lambda^3_\varepsilon(V^*)$. Commençons par rappeler ce qu'est une application moment sur une une variété de Poisson.

Un crochet de Poisson sur une variété lisse est la donnée d'un crochet d'algèbre de Lie sur l'algèbre des fonctions agissant comme une dérivation :

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g.$$

Les variétés symplectiques sont des exemples de variétés de Poisson. En effet à partir dune forme symplectique Ω sur une variété X on peut définir le crochet de Poisson

$$\{f, g\} = X_f(g),$$

X_f étant l'unique champ de vecteurs tel que

$$i_{X_f}(\Omega) = -df.$$

Un autre exemple de variété de Poisson est celui des coalgèbres de Lie : si $(\mathcal{G}, [\ ,\ ])$ est une algèbre de Lie il existe un unique crochet de Poisson $\{\ ,\ \}$ sur $\mathcal{G}^*$ vérifiant pour tous vecteurs x et y de $\mathcal{G}$

$$\{f_x, f_y\} = f_{[x,y]},$$

f_x étant la fonction sur $\mathcal{G}^*$ définie par

$$f_x(\xi) = \xi(x).$$

Une application moment sur une variété de Poisson $(X, \{\ ,\ \})$ est une application lisse $\mu : X \to \mathcal{G}^*$ telle que

$$\{f \circ \mu, g \circ \mu\}_X = \{f, g\}_{\mathcal{G}^*} \circ \mu,$$

pour toutes fonctions lisses f et g sur la coalgèbre de Lie $\mathcal{G}^*$.

Une action λ d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (X, Ω) est dite hamiltonienne si elle préserve la structure symplectique et s'il existe une application moment $\mu : X \to \mathcal{G}^*$ telle que pour tout $Y \in \mathcal{G}$

$$\lambda_*(Y) = -X_{\tilde{\mu}(Y)},$$

λ_* étant l'action infinitésimale de $\mathcal{G}$ sur X associée à λ et $\tilde{\mu}(Y)$ étant la fonction lisse sur X définie par

$$\tilde{\mu}(Y)(x) = \mu(x)(Y).$$

Les applications moments se sont imposées comme un outil essentiel pour résoudre des problèmes géométriques quand il y a un certain nombre de symétries. Citons par exemple le théorème de réduction de Marsden-Weinstein qui permet de construire des variétés symplectiques à partir d'une “bonne” action hamiltonienne. Soit $\mu : M \to \mathcal{G}^*$ une application moment associée à une action hamiltonienne d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (X, Ω). Fixons $c \in \mathcal{G}^*$ et notons $G_c \subset G$ le stabilisateur de c pour l'action coadjointe. Si c est une valeur régulière de μ, et si G_c est compact et agit sur $\mu^{-1}(c)$ de façon libre et transitive alors il existe une unique forme symplectique Ω_c sur $\mu^{-1}(c)/G_c$ telle que

$$\pi_c^*(\Omega_c) = \Omega_{\mu^{-1}(c)},$$

π_c étant la projection $\mu^{-1}(c) \to \mu^{-1}(c)/_{G_c}$.

Revenons maintenant à notre espace de formes $\Lambda^3(V^*)$. Le produit extérieur, antisymétrique et non dégénéré, définit une forme symplectique sur $\Lambda^3(V^*)$. Plus précisément

$$\Theta_\theta(\omega,\omega') = \frac{\omega\wedge\omega'}{\theta}$$

est une forme symplectique sur $\Lambda^3(V^*)$. Hitchin a montré que l'action de $SL(6,\mathbb{R})$ sur $(\Lambda^3(V^*),\Theta_\theta)$ est hamiltonienne.

PROPOSITION 2.17 (Hitchin)**.** *L'action de $SL(6,\mathbb{R})$ sur l'espace symplectique $(\Lambda^3(V^*),\Theta)$ est hamiltonienne d'application moment $K^\theta : \Lambda^3(V^*) \to sl(6,\mathbb{R})$.*

On a identifié ici l'algèbre de Lie $sl(6,\mathbb{R})$ à sa coalgèbre de Lie via la forme de Killing $(X,Y)\mapsto \frac{1}{6}\operatorname{Tr}(XY)$.

Munissons maintenant V d'une forme symplectique Ω. Fixons la forme volume $\theta = -\frac{1}{6}\Omega^3$ et notons $\lambda = \lambda_\theta$, $K = K^\theta$, $\Theta = \Theta_\theta$. Le sous-espace $\Lambda^3_\varepsilon(V^*)$ des formes effectives est un sous-espace symplectique de $(\Lambda^3(V^*),\Theta)$. En effet, d'après le théorème de Hodge-Lepage-Lychagin, toute forme ω s'écrit

$$\omega = \omega_0 + \omega_1\wedge\Omega,$$

ω_0 étant effective. Le produit extérieur est donc non dégénéré sur $\Lambda^3_\varepsilon(V^*)$. De plus l'action de $Sp(3)$ préserve Θ. Il est alors naturel de se demander si cette action est hamiltonienne.

LEMME 2.18. *Une 3-forme ω sur V^* est effective si et seulement si $K_\omega \in sp(3)$.*

Démonstration. Dans une base symplectique $(e_1,e_2,e_3,f_1,f_2,f_3)$, K_ω s'écrit

$$K_\omega(X)\theta = \sum_{j=1}^{3}(i_X\omega\wedge\omega\wedge e_j^*)\otimes e_j + \sum_{j=1}^{3}(i_X\omega\wedge\omega\wedge f_j^*)\otimes f_j.$$

Ainsi, si on note $K_\omega = \begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}$, on a

$$\begin{cases} A_{jk}\theta = i_{e_j}\omega\wedge\omega\wedge e_k^*\\ B_{jk}\theta = i_{f_j}\omega\wedge\omega\wedge e_k^*\\ C_{jk}\theta = i_{e_j}\omega\wedge\omega\wedge f_k^*\\ D_{jk}\theta = i_{f_j}\omega\wedge\omega\wedge f_k^*.\end{cases}$$

Or ω est effective si et seulement si les relations suivantes sont vérifiées pour $k = 1,2,3$,

$$\begin{cases} i_{e_k}\omega\wedge\Omega = \omega\wedge i_{e_k}\Omega = \omega\wedge f_k^*\\ i_{f_k}\omega\wedge\Omega = \omega\wedge i_{f_k}\Omega = -\omega\wedge e_k^*,\end{cases}$$

et donc ω est effective si et seulement si $D = -A^t$, $B^t = B$ et $C^t = C$ i.e. si et seulement si $K_\omega \in sp(3)$. □

COROLLAIRE 2.19. *L'action de $Sp(3)$ sur l'espace symplectique $(\Lambda^3_\varepsilon(V^*),\Theta)$ est hamiltonienne d'application moment $K : \Lambda^3_\varepsilon(V^*) \to sp(3)$.*

Ainsi l'invariant de Hitchin restreint aux formes effectives est à valeurs dans $sp(3)$. Rappelons que l'invariant de Lychagin-Roubtsov est à valeurs dans l'espace des formes quadratiques $S^2(V^*)$. Or l'application $f \mapsto X_f$ induit un isomorphisme d'algèbres de Lie entre $(S^2(V^*), \{\ ,\ \})$ et $(sp(3), [\ ,\ ])$, $\{\ ,\ \}$ étant le crochet de Poisson sur V défini par la forme symplectique Ω. On constate que modulo cette identification, ces deux invariants coïncident :

PROPOSITION 2.20. *Soit ω une 3-forme effective sur V. Pour tous vecteurs X et Y de V la relation suivante est vérifée*

$$q_\omega(X, Y) = \Omega(K_\omega X, Y).$$

DÉMONSTRATION. Un calcul explicite de q_ω et K_ω permet de vérifier le résultat pour chacun des neuf représentants de la table 2.6. Le résultat est alors vrai pour toute forme puisque, pour tout $F \in Sp(3)$,

$$\begin{cases} q_{F^*\omega} = F^t q_\omega F \\ K_{F^*\omega} = F^{-1} K_\omega F. \end{cases}$$

□

REMARQUE 2.21. *Ainsi, d'après 2.6, les niveaux de moment $q =$ constant décrivent les différentes orbites de l'action de $Sp(3)$ sur $\Lambda^3_\varepsilon(V^*)$.*

2.3. Une structure de Kähler sur $\Lambda^{2p}(\mathbb{R}^{4p})$. L'approche de Hitchin se généralise aisément en dimension impaire : le produit extérieur définit une structure symplectique sur $\Lambda^n(\mathbb{R}^{2n})$ lorsque n est impair et l'action de $SL(n, \mathbb{R})$ est hamiltonienne d'application moment $K : \Lambda^n(\mathbb{R}^n) \to sl(n, \mathbb{R})$, K étant l'invariant de Hitchin généralisé. Le cas pair est beaucoup plus "symétrique" mais on peut cependant construire une structure de Kähler exotique - c'est à dire moins naturelle - et une application moment très similaire à celle de Hitchin.

Soit $(V, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension $2n$ avec n pair. Fixons un vecteur a de V de norme 1 et notons ξ_a la forme linéaire $b \mapsto \langle a, b\rangle$. Soit W_a l'hyperplan orthogonal à a. Toute forme $\omega \in \Lambda^n(V^*)$ se décompose de manière unique

$$\omega = \alpha + \xi_a \wedge \beta$$

avec $\alpha \in \Lambda^n(W_a^*)$ et $\beta \in \Lambda^{n-1}(W_a^*)$.

Soit $\star : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{2n-k}(V^*)$ et $\square : \Lambda^k(W_a)^*) \to \Lambda^{2n-k-1}(W_a^*)$ les opérateurs de Hodge associés à la métrique $\langle , \rangle$ sur V et à sa restriction sur W_a :

$$\begin{cases} \langle \omega, \omega' \rangle \theta_V = \omega \wedge \star\omega' & \forall \omega, \omega' \in \Lambda^k(V^*) \\ \langle \alpha, \alpha' \rangle \theta_{W_a} = \alpha \wedge \square\alpha' & \forall \alpha, \alpha' \in \Lambda^k(W_a^*), \end{cases}$$

θ_V étant la forme volume sur V définie par $\langle , \rangle$ et θ_{W_a} la forme volume sur W_a définie par $\langle , \rangle|_{W_a}$.

Il est bien connu que l'opérateur de Hodge $\star : \Lambda^k(\mathbb{R}^q) \to \Lambda^{q-k}(\mathbb{R}^q)$ satisfait la relation

$$\star^2 = (-1)^{k(q-k)} Id.$$

De plus, puisque le produit extérieur et $\langle , \rangle$ sont symétriques, on a

$$\begin{cases} \omega \wedge \star\omega' = \star\omega \wedge \omega' & \forall \omega, \omega' \in \Lambda^n(V^*) \\ \alpha \wedge \square\alpha' = \square\alpha \wedge \alpha' & \forall \alpha, \alpha' \in \Lambda^k(W_a^*),\ k = n \text{ ou } n-1. \end{cases}$$

Enfin il est immédiat de vérifier que

$$\star(\alpha + \xi_a \wedge \beta) = \Box\beta + \xi_a \wedge \Box\alpha.$$

DEFINITION 2.22. *La structure complexe I_a sur $\Lambda^n(V^*)$ associée au vecteur a est définie par*

$$I_a(\alpha + \xi_a \wedge \beta) = -\Box\beta + \xi_a \wedge \Box\alpha.$$

LEMME 2.23. *I_a est une isométrie pour le produit scalaire $\langle , \rangle$ sur $\Lambda^n(V^*)$:*

$$\langle I_a\omega, I_a\omega' \rangle = \langle \omega, \omega' \rangle, \ \forall \omega, \omega, \in \Lambda^n(V^*)$$

DÉMONSTRATION. Soit $\omega = \alpha + \xi_a \wedge \beta$ et $\omega' = \alpha' + \xi_a \wedge \beta'$ deux n-formes sur V :

$$\begin{aligned}
\langle I_a\omega, I_a\omega' \rangle \theta_V &= I_a(\omega) \wedge \star I_a(\omega') \\
&= (-\Box\beta + \xi_a \wedge \Box\alpha) \wedge \star(-\Box\beta' + \xi_a \wedge \Box\alpha') \\
&= (-\Box\beta + \xi_a \wedge \Box\alpha) \wedge (\alpha' - \xi_a \wedge \beta') \\
&= \xi_a \wedge (\Box\beta \wedge \beta + \Box\alpha \wedge \alpha') \\
&= \xi_a \wedge (\beta \wedge \Box\beta' + \alpha \wedge \Box\alpha') \\
&= \langle \omega, \omega' \rangle \theta_V.
\end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 2.24. *$(\langle , \rangle, I_a, \Theta_a)$ est une structure de Kähler sur $\Lambda^n(V^*)$ avec*

$$\Theta_a(\alpha + \xi_a \wedge \beta, \alpha' + \xi_a \wedge \beta') = \frac{\xi_a \wedge (\alpha \wedge \beta' - \alpha' \wedge \beta)}{\theta_V}.$$

Définissons pour $\omega = \alpha + \xi_a \wedge \beta \in \Lambda^n(V^*)$ l'endomorphisme $K^a_\omega : W_a \to W_a$ par

$$K^a_\omega(w) \cdot \theta_{W_a} = A(i_w(\alpha) \wedge \beta - \alpha \wedge i_w(\beta)),$$

$A : \Lambda^{2n-2}(W_a^*) \to \Lambda^{2n-1}(W_a^*) \otimes W_a$ étant l'isomorphisme induit par le produit extérieur. Remarquons que K_ω n'est pas nécessairement de trace nulle. Fixons en effet une base $(e_1, \dots, e_{2n-1})$ de W_a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(K^a_\omega) \cdot \theta_{W_a} &= \sum_{i=1}^{2n-1} \left(i_{e_i}\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge i_{e_i}\beta\right) \wedge e_i^* \\
&= -2 \sum_{i=1}^{2n-1} \alpha \wedge i_{e_i}\beta \wedge e_i^* \\
&= 2\alpha \wedge \beta.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{Tr}(K^a_\omega) = \mathrm{pf}(\omega),$$

avec $\mathrm{pf}(\omega) = \frac{\omega \wedge \omega}{\theta_V}$. L'endomorphisme K^a_ω induit néanmoins une forme linéaire $\tilde{K}^a_\omega$ sur $sl(W_a)^*$ définie par

$$\tilde{K}^a_\omega(X) = \mathrm{Tr}(X.K^a_\omega).$$

PROPOSITION 2.25. *L'action naturelle de $SL(W_a)$ sur $(\Lambda^n(V^*), \Theta_a)$ est hamiltonienne d'application moment $\tilde{K}^a$.*

DÉMONSTRATION. L'action d'un élément $F \in SL(W_a)$ sur $\Lambda^n(V^*)$ est

$$F \cdot (\alpha + \xi_a \wedge \beta) = F^*\alpha + \xi_a \wedge F^*\beta.$$

Il est donc clair que l'action de $SL(W_a)$ préserve la forme symplectique Θ_a puisque tout élément de $SL(W_a)$ préserve la forme volume θ_{W_a}. Soit maintenant $X \in sl(W_a)$ et $\omega = \alpha + \xi_a \wedge \beta \in \Lambda^n(V^*)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{K}^a_\omega(X) \cdot \theta_{W_a} &= \sum_{i,j=1}^{2n-1} X_{ij} K^{ji}_\omega \\
&= \sum_{i,j=1}^{2n-1} X_{ij} i_{e_j}\alpha \wedge \beta \wedge e_i^* - X_{ij}\alpha \wedge i_{e_j}\beta \wedge e_i^* \\
&= L_X(\alpha) \wedge \beta - \alpha \wedge L_X\beta \\
&= \Theta_a(L_X\omega, \omega) \cdot \theta_{W_a}.
\end{aligned}$$

$\tilde{K}^a$ est l'application moment recherchée. □

REMARQUE 2.26. *Nous nous sommes attardés sur cette structure de Kähler dans le cas pair car elle généralise l'approche de Hitchin. Elle est cependant beaucoup moins naturelle du fait du choix initial d'un vecteur a. Ainsi par exemple, il semble difficile de s'en inspirer pour munir le sous-espace des formes effectives d'une structure similaire. La décomposition* $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{4p-1}$ *est en effet peu compatible avec la structure symplectique sur* $\mathbb{R}^{4p}$.

3. Formes bieffectives

La dimension des espaces $\Lambda^n(\mathbb{R}^{2n})$ et $\Lambda^n_\varepsilon(\mathbb{R}^{2n})$ croît de façon presque exponentielle en fonction de n. Plus précisément

$$\begin{cases} \dim(\Lambda^n(\mathbb{R}^{2n})) \sim \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \\ \dim(\Lambda^n_\varepsilon(\mathbb{R}^{2n})) \sim \dfrac{3}{4}\dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}}. \end{cases}$$

Ainsi par exemple $\Lambda^4(\mathbb{R}^8)$ est de dimension 70 et $\Lambda^4_\varepsilon(\mathbb{R}^8)$ est de dimension 42. Une orbite générique pour l'action du groupe $Sp(4)$ est de dimension 21. L'espace des orbites est alors beaucoup plus grand et plus complexe qu'en dimension 2 ou 3 et reste très mal connu à ce jour. Nous simplifions le problème en nous intéressant à un sous-espace, celui des formes bieffectives qui sont associées aux opérateurs pluriharmoniques.

3.1. Décomposition de l'algèbre extérieure d'un espace symplectique complexe. Soit $(V^{2n}, \Omega_1 + i\Omega_2)$ un espace symplectique complexe de dimension complexe $2n$: $\Omega_1 + i\Omega_2$ est une 2-forme $\mathbb{C}$-bilinéaire sur V et non dégénérée. Ω_1 et Ω_2 sont deux formes symplectiques réelles sur V satisfaisant la relation de compatibilité

$$\Omega_2(.,.) = -\Omega_1(I.,.),$$

I étant la structure complexe sur V.

Une forme réelle $\omega \in \Lambda^{2n}(V^*)$ est dite bieffective si elle est effective pour Ω_1 et pour Ω_2 :

$$\omega \wedge \Omega_1 = \omega \wedge \Omega_2 = 0.$$

Nous montrons dans cette partie un résultat analogue au théorème de décomposition de Hodge-Lepage-Lychagin pour les formes bieffectives.

Notons $\Lambda^k(V^*)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des k-formes $\mathbb{R}$-linéaires alternées sur V, $\Lambda^k(V^*, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des k-formes $\mathbb{C}$-linéaires alternées et $\Lambda^k(V^*) \otimes \mathbb{C}$ le complexifié de $\Lambda^k(V^*)$. Définissons les opérateurs que Bonan appelle les opérateurs de Lichnerowicz ([**Bo**]) :

DEFINITION 2.27. *Les opérateurs de Lichnerowicz associés à Ω_1 et Ω_2 sont*

$$\begin{aligned} \perp_j : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k-2}(V^*), \omega \mapsto i_{X_{\Omega_j}}\omega \ \ (j = 1, 2) \\ \top_j : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k+2}(V^*), \omega \mapsto \omega \wedge \Omega_j \ \ (j = 1, 2) \\ H : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^k(V^*), \omega \mapsto (2n - k)\omega \\ M : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^k(V^*), \omega \mapsto [\perp_2, \top_1]\omega. \end{aligned}$$

LEMME 2.28 (Werbitskii-Bonan)**.** *Les opérateurs de Lichnerowicz satisfont les relations suivantes*

$$\begin{cases} [\perp_1, \top_1] = H & [\perp_2, \top_2] = H \\ [\perp_1, \top_2] = -M & [\perp_2, \top_1] = M \\ [\perp_1, \perp_2] = 0 & [\top_1, \top_2] = 0 \\ [\perp_1, H] = -2\perp_1 & [\perp_2, H] = -2\perp_2 \\ [\top_1, H] = 2\top_1 & [\top_2, H] = 2\top_2 \\ [\perp_1, M] = -2\perp_2 & [\perp_2, M] = 2\perp_1 \\ [\top_1, M] = -2\top_2 & [\top_2, M] = 2\top_1 \\ [H, M] = 0. \end{cases}$$

COROLLAIRE 2.29. *On peut munir $\Lambda^*(V^*) \otimes \mathbb{C}$ d'une structure de module sur l'algèbre de Lie $sl(2, \mathbb{C}) \times sl(2, \mathbb{C})$ en posant*

$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{1}{2}(\perp_1 + i\perp_2) & E_2 = \frac{1}{2}(\perp_1 - i\perp_2) \\ F_1 = \dfrac{1}{2}(\top_1 - i\top_2) & F_2 = \frac{1}{2}(\top_1 + i\top_2) \\ H_1 = \dfrac{1}{2}(H + iM) & H_2 = \frac{1}{2}(H - iM), \end{cases}$$

(E, F, H) étant la base canonique de $sl(2, \mathbb{C})$ i.e.

$$\begin{aligned} [E, F] = H \\ [E, H] = -2E \\ [F, H] = 2F. \end{aligned}$$

DEFINITION 2.30. *Une forme extérieure $\omega \in \Lambda^k(V^*) \otimes \mathbb{C}$ est dite primitive si $E_1\omega = E_2\omega = 0$ et si il existe $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que $H_1\omega = \lambda_1\omega$ et $H_2\omega = \lambda_2\omega$.*

PROPOSITION 2.31. *Toute forme ω de $\Lambda^k(V^*) \otimes \mathbb{C}$ se décompose en une somme finie et unique*

$$\omega = \sum_{j,k,l} F_1^k F_2^l \omega_j,$$

les ω_j étant des formes primitives.

Démonstration. Notons $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie semi-simple $sl(2,\mathbb{C}) \times sl(2,\mathbb{C})$. Remarquons tout d'abord que tout $\mathcal{G}$-module W de dimension finie contient un vecteur primitif. En effet H_1 et H_2 commutent dont ils ont un vecteur propre commun x. Or pour tous entiers p et q $E_1^p E_2^q x$ est aussi un vecteur propre commun à H_1 et H_2. Il existe alors p et q tels que $z = E_1^p E_2^q x \neq 0$ et $E_1^{p+1} E_2^q x = E_1^p E_2^{q+1} x = 0$. Le vecteur z est donc primitif. Ainsi tout module irréductible W de dimension finie est de la forme $W = \mathcal{G}v$ où v est un vecteur primitif. Mais il est facile de vérifier qu'une base de $\mathcal{G}v$ est $\{F_1^k F_2^l v\}$ où k et l décrivent un nombre fini de valeurs.

Maintenant d'après le théorème de Weyl $\Lambda^*(V^*) \otimes \mathbb{C}$ se décompose en une somme unique de sous-modules irréductibles

$$\Lambda^*(V^*) \otimes \mathbb{C} = \mathcal{G}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{G}v_r,$$

et donc toute forme s'écrit de manière unique

$$\omega = \sum_{a=1}^{r} \sum_{k,l} \alpha_{k,l} F_1^k F_l^2 v_a = \sum_j \sum_{k,l} F_1^k F_l^2 \omega_j,$$

les v_a et ω_j étant des formes primitives. □

DEFINITION 2.32. *Une forme réelle $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ est bieffective si elle est effective pour Ω_1 et Ω_2 c'est à dire si $\perp_1\omega = \perp_2\omega = 0$.*

REMARQUE 2.33. *Si $\omega = \alpha + i\beta \in \Lambda^k(V^*) \otimes \mathbb{C}$ est primitive alors α et β sont bieffectives.*

LEMME 2.34. *Soit $\omega \in \Lambda^{2n}(V^*)$ une forme réelle de degré $2n$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) ω est primitive

(2) ω est bieffective

(3) $\omega \wedge \Omega_1 = \omega \wedge \Omega_2 = 0$

Démonstration. Nous savons d'après 1.13 et 1.15 que $H = 0$ sur $\Lambda^{2n}(V^*)$ et $\perp_1$ et $\perp_2 : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k-2}(V^*)$ sont injectives pour $k > 2n$ et $\top_1$ et $\top_2 : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k+2}(V^*)$ sont injectives pour $k < 2n$. Puisque $[\perp_j, \top_j] = H$, on en déduit alors que lorsque $\omega \in \Lambda^{2n}(V^*)$ $\perp_j\omega = 0$ si et seulement si $\top_j = 0$ pour $j = 1, 2$. De plus $[\perp_2, \top_1] = M$. Donc si $\omega \in \Lambda^{2n}(V^*)$ est bieffective alors $M\omega = 0$: toute forme bieffective réelle de degré $2n$ est primitive. Et réciproquement toute forme primitive réelle est bieffective. □

THEOREME 2.35. *Soit $(V, \Omega_1 + i\Omega_2)$ un espace symplectique complexe de dimension complexe $2n$. Toute forme extérieure réelle $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ se décompose en une somme finie*

$$\omega = \sum_{j,k} \omega_{jk} \wedge \Omega_1^j \wedge \Omega_2^k,$$

où les ω_{jk} sont des formes réelles bieffectives.

En particulier toute forme réelle $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ s'écrit

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 \wedge \Omega_1 + \omega_2 \wedge \Omega_2,$$

ω_0 étant bieffective. De plus lorsque $k = 2n$ la forme ω_0 est unique et s'appelle la partie bieffective de ω.

DÉMONSTRATION. On sait que ω s'écrit de manière unique

$$\omega = \sum_{j,k,l} (\alpha_j + i\beta_j) \wedge (\Omega_1 - i\Omega_2)^k \wedge (\Omega_1 + i\Omega_2)^l,$$

les formes $\alpha_j + i\beta_j$ étant primitives. En particulier les formes α_j et β_j sont des formes bieffectives. En identifiant partie réelle et partie imaginaire on obtient le théorème de décomposition.

Lorsque $k = 2n$ la partie bieffective de ω est une forme bieffective de degré $2n$ et est donc primitive. Cette forme est le premier terme de la décomposition en forme primitives de ω. Par unicité de cette décomposition ω_0 est uniquement déterminée. $\square$

Par la suite nous nous intéresserons plus particulièrement aux 4-formes sur $\mathbb{R}^8$. Pour ces dimensions nous disposons d'une formule que l'on peut obtenir par un calcul [2]. Cette formule sera utilisée au chapitre 5 pour calculer la forme bieffective associée à des exemples précis d'équations de Monge-Ampère sur $\mathbb{R}^4$.

PROPOSITION 2.36. *(1) La partie effective d'une 4-forme réelle ω sur un espace symplectique réel (V, Ω) de dimension 8 est :*

$$\omega_0 = \omega - \frac{1}{2}\top\bot\omega + \frac{1}{12}\top^2\bot^2\omega$$

(2) La partie bieffective d'une 4-forme réelle $\omega \in \Lambda^4(V^*)$ sur un espace symplectique complexe $(V, \Omega_1 + i\Omega_2)$ de dimension réelle 8 est :

$$\omega_0 = \theta - \frac{1}{4}\{\top_2\bot_2\theta + \top_1\bot_1\theta - \frac{1}{4}M(M\theta - \top_1\bot_2\theta + \top_2\bot_1\theta)\}$$

avec

$$\theta = \omega - \frac{(3\bot_1^2\omega - \bot_2^2\omega)}{64}\Omega_1^2 - \frac{\bot_1\bot_2\omega}{8} - \frac{(3\bot_2^2\omega - \bot_1^2\omega)}{64}\Omega_2^2$$

3.2. L'action du groupe $Sp(n, \mathbb{C})$. Notons $\Lambda^{2n}_{BE}(V^*)$ l'espace des $2n$-formes réelles bieffectives pour Ω_1 et Ω_2, $\Lambda^n_E(V^*, \mathbb{C})$ l'espace des n-formes $\mathbb{C}$-linéaires effectives pour $\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2$ et $\overline{\Lambda^n_E(V^*, \mathbb{C})}$ l'espace des n-formes $\mathbb{C}$-antilinéaires effectives pour $\overline{\Omega} = \Omega_1 - i\Omega_2$.

LEMME 2.37.

$$\Lambda^{2n}_{BE}(V^*) \otimes \mathbb{C} = \Lambda^n_E(V^*, \mathbb{C}) \otimes \overline{\Lambda^n_E(V^*, \mathbb{C})}.$$

DÉMONSTRATION. $\omega \in \Lambda^{2n}(V^*) \otimes \mathbb{C}$ est bieffective si et seulement si $\omega \wedge \Omega = \omega \wedge \overline{\Omega} = 0$. Notons $\top$ la multiplication par Ω et $\overline{\top}$ la multiplication par $\overline{\Omega}$. Une version complexe de 1.15 nous dit que $\top : \Lambda^{p,q}(V^*) \to \Lambda^{p+2,q}$ est injective pour tout couple (p,q) tel que $p < n$ et $\overline{\top} : \Lambda^{p,q}(V^*) \to \Lambda^{p,q+2}(V^*)$ est injective pour tout couple (p,q) tel que $q < n$. Et donc

$$\begin{aligned} &Ker(\top) \cap Ker(\overline{\top}) \\ &\quad = Ker(\top : \Lambda^{n,n}(V^*) \to \Lambda^{n+2,n}(V^*)) \cap Ker(\overline{\top} : \Lambda^{n,n}(V^*) \to \Lambda^{n,n+2}(V^*)) \\ &\quad = Ker(\top : \Lambda^n(V^*, \mathbb{C}) \to \Lambda^{n+2}(V^*, \mathbb{C})) \otimes Ker(\overline{\top} : \overline{\Lambda^n(V^*, \mathbb{C})} \to \overline{\Lambda^{n+2}(V^*, \mathbb{C})}). \end{aligned}$$

$\square$

[2]la démonstration de cette proposition est donnée dans l'annexe B

LEMME 2.38. *Le produit*

$$\langle \omega, \theta \rangle = \frac{\omega \wedge \theta}{\Omega \wedge \Omega}$$

est non dégénéré sur $\Lambda^n_E(V^*, \mathbb{C})$

DÉMONSTRATION. $\langle , \rangle$ est non dégénéré sur $\Lambda^n(V^*, \mathbb{C})$. De plus toute forme $\mathbb{C}$-linéaire θ s'écrit sous la forme $\theta = \theta_0 + \theta_1 \wedge \Omega$ avec θ_0 effective. Donc, si $\omega \in \Lambda^n_E(V^*, \mathbb{C})$ on a

$$\langle \omega, \theta \rangle = \langle \omega, \theta_0 \rangle,$$

donc $\langle , \rangle$ est non dégénéré sur $\Lambda^n_E(V^*, \mathbb{C})$. □

Ainsi si l'on identifie $W = \Lambda^n_E(V^*, \mathbb{C})$ à son espace dual par ce produit intérieur, on identifie alors naturellement l'espace des formes bieffectives à l'ensemble des formes hermitiennes sur W. Cette identification s'écrit dans une base $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$ de W

$$\omega = \sum_{j,k} a_{jk} \sigma_j \wedge \overline{\sigma_k} \mapsto h_\omega = \sum_{j,k} a_{jk} \sigma_j^* \overline{\sigma_k^*}.$$

La matrice H_ω de h_ω dans $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$ est

$$H_\omega = \overline{J}.\overline{A}.J,$$

où A est la matrice $(a_{jk})_{j,k}$ et $J = (\langle \sigma_j, \sigma_k \rangle)_{jk}$.

PROPOSITION 2.39. *L'application $\omega \mapsto h_\omega$ est un isomorphisme entre l'espace des des formes bieffectives sur V et l'espace des formes hermitiennes sur W.*

Soit $Sp(n, \mathbb{C})$ le groupe des automorphismes complexes de V qui préservent la forme symplectique Ω. L'action naturelle de $Sp(n, \mathbb{C})$ sur l'espace des formes $\Lambda^*(V^*, \mathbb{C})$ induit une action de $Sp(n, \mathbb{C})$ sur l'espace des formes effectives $W = \Lambda^n_E(V^*, \mathbb{C})$ dont le noyau est $\mathbb{Z}_2$:

$$F \cdot \omega := F^* \omega.$$

Puisque tout symplectomorphisme est de déterminant 1, l'action du groupe symplectique complexe $Sp(n, \mathbb{C})$ préserve le produit intérieur $\langle , \rangle$:

$$\langle F^* \omega, F^* \sigma \rangle = \frac{F^* \omega \wedge F^* \sigma}{\Omega^2} = \det(F) \cdot \langle \omega, \sigma \rangle = \langle \omega, \sigma \rangle.$$

Ainsi lorsque n est pair

$$Sp(n, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \subset SO(W, \mathbb{C})$$

où $SO(W, \mathbb{C})$ est le groupe des automorphismes complexes de W qui préservent $\langle , \rangle$.

Pour $n = 2$, on a en fait égalité :

LEMME 2.40.

$$Sp(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 = SO(5, \mathbb{C}).$$

DÉMONSTRATION. $\Lambda^2_E(\mathbb{C}^4)$ est dimension 5. Donc $SO(W, \mathbb{C}) = SO(5, \mathbb{C})$ qui est un groupe de Lie connexe de dimension réelle 20. Mais $Sp(2, \mathbb{C})$ est lui aussi connexe est de dimension réelle 20. Donc $Sp(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 = SO(W)$. □

$Sp(n, \mathbb{C})$ agit de même sur l'espace des $2n$-formes bieffectives. Il est trivial de vérifier le lemme suivant

LEMME 2.41. *L'action de $Sp(n,\mathbb{C})$ sur l'espace des formes bieffectives réelles $\Lambda^{2n}_{BE}(V^*)$ est l'action de Hermite sur l'espace des formes hermitiennes :*

$$H_{F^*\omega} = \overline{F} H_\omega F^t.$$

3.3. Le mystère de la dimension 14. Lorsque que l'on étudie la géométrie des formes effectives en petite dimension, une dimension revient avec une obstination troublante : la dimension 14. Ainsi par exemple

(1) l'espace des 3-formes effectives sur $\mathbb{R}^6$ est de dimension 14. On le vérifie aisément en utilisant le théorème de Hodge-Lychagin :
$$\Lambda^3(\mathbb{R}^6) = \Lambda^3_\varepsilon(\mathbb{R}^6) \oplus \Lambda^2(\mathbb{R}^6).$$
(2) l'espace des 2-formes effectives sur $\mathbb{R}^6$ est de dimension 14 puisque c'est l'orthogonal dans $so(6)$ de la forme symplectique $\Omega \in so(6)$.
(3) l'espace des 4-formes "hypereffectives" sur $\mathbb{R}^8$ est de dimension 14 (nous appelons forme hypereffective une forme effective pour chacune des formes symplectiques Ω_I, Ω_J et Ω_K définies par la structure hyperkähler de $\mathbb{R}^8 = \mathbb{H}^2$).

Cette dimension 14 est celle du groupe de Lie exceptionnel G_2 associé à la géométrie des octonions. Nous étudions ici d'un peu plus près la correspondance entre ce groupe de Lie et la géométrie des formes extérieures et donnons quelques autres descriptions de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}_2$. Les remarques faites ici sont anecdotiques dans le cadre de cette thèse mais nous espérons qu'elles serviront dans le futur pour une meilleure compréhension du rôle joué par ce groupe G_2 dans la géométrie des équations différentielles.

Soit $(\mathbb{O}, \langle,\rangle)$ l'algèbre normée des octonions, E_7 le sous-espace des imaginaires purs et $\phi \in \Lambda^3(E_7^*)$ est la forme associative :

$$\phi(x,y,z) = \langle x, yz\rangle.$$

Notons de plus $\psi \in \Lambda^4(E_7^*)$ la forme coassociative :

$$\psi(x,y,z,w) = \frac{1}{2}\langle x, y(\overline{z}w) - w(\overline{z}y)\rangle.$$

Dans la base canonique $(e_1,\ldots,e_7)$ de E_7, ϕ et ψ s'écrivent

$$\begin{cases} \phi = \omega_{123} + \omega_{145} - \omega_{167} + \omega_{246} + \omega_{257} + \omega_{347} - \omega_{356} \\ \psi = -\omega_{1247} + \omega_{1256} + \omega_{1346} + \omega_{1357} - \omega_{2345} + \omega_{2367} + \omega_{4567}, \end{cases}$$

avec $\omega_{ijk} = e_i^* \wedge e_j^* \wedge e_k^*$ et $\omega_{ijkl} = e_i^* \wedge e_j^* \wedge e_k^* \wedge e_l^*$. On constate en particulier que ψ est la forme duale de ϕ pour l'opérateur de Hodge associé au produit scalaire $\langle,\rangle$ i.e.

$$\psi = \star\phi.$$

Par définition, le groupe de Lie G_2 est le groupe des automorphismes de $\mathbb{O}$:

$$G_2 = \{F \in GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}) : F(xy) = F(x)F(y), \forall x, y \in \mathbb{O}\}.$$

Le produit octonionique étant compatible avec la norme sur $\mathbb{R}^8$, G_2 est un sous-groupe de $SO(7)$. De plus Bryant a montré que

$$G_2 = \{F \in GL(\mathbb{R}^7) : F^*\phi = \phi\}.$$

L'algèbre de Lie $\mathcal{G}_2$ est alors

$$\mathcal{G}_2 = \{X \in so(7) : L_X\phi = 0\}.$$

Un calcul direct permet de vérifier que

$$\mathcal{G}_2 = so(4) \oplus K,$$

avec

$$so(4) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_4 - a_3 & a_2 + a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 - a_4 & 0 & a_6 - a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 - a_5 & a_1 - a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & -a_1 & 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 & -a_4 & 0 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & -a_3 & -a_5 & -a_6 & 0 \end{pmatrix}, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

et K

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_1 + \beta_1 & \alpha_2 + \beta_2 & \alpha_3 + \beta_3 & \alpha_4 + \beta_4 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_4 & \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_3 & \beta_4 & -\beta_1 & -\beta_2 \\ -\alpha_1 - \beta_1 & \alpha_4 & -\beta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_2 - \beta_2 & -\alpha_3 & -\beta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_3 - \beta_3 & \alpha_2 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_4 - \beta_4 & -\alpha_1 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Identifions $so(7)$ avec $\Lambda^2(\mathbb{R}^7)$ et notons $\Lambda^2_7 = \{i_u(\phi), u \in E_7\}$. La description explicite précédente permet de vérifier le lemme suivant :

LEMME 2.42. $\Lambda^2(\mathbb{R}^7)$ *s'écrit comme la somme de sous-espaces orthogonaux (pour* $\langle , \rangle$*) et* G_2 *invariants*

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^7) = \Lambda^2_7 \oplus \mathcal{G}_2.$$

Les deux résultats suivants, qui se vérifient par un calcul direct à partir de 2.42 donnent des autres descriptions de $\mathcal{G}_2$:

PROPOSITION 2.43.

$$\mathcal{G}_2 = \{\theta \in \Lambda^2(\mathbb{R}^7) : \theta \wedge \psi = 0\}.$$

PROPOSITION 2.44. *Soit* $u \in E_7$ *de norme* 1 *et* $\xi_u \in E_7^*, x \mapsto \langle x, u\rangle$. *Soit* $\pi_u : \Lambda^2(\mathbb{R}^7) \to \Lambda^2(\mathbb{R}^6)$ *la projection associée à la décomposition orthogonale* $\mathbb{R}^7 = \mathbb{R}^6 \oplus \mathbb{R}u$ *:*

$$\pi_u(\theta_0 + \xi_u \wedge \theta_1) = \theta_0.$$

Soit $\Lambda^2_\varepsilon(\mathbb{R}^6)$ *l'espace des 2-formes effectives pour la forme symplectique* $i_u(\phi)$ *sur* $\mathbb{R}^6$.

$\pi_u : \mathcal{G}_2 \to \Lambda^2_\varepsilon(\mathbb{R}^6)$ *est un isomorphisme d'inverse*

$$\gamma_u : \theta \mapsto \theta + \frac{1}{2} \perp^2 (\theta \wedge \psi_1) \wedge \xi_u$$

où ψ_1 *est définie par* $\psi = \psi_0 + \psi_1 \wedge \xi_u$ *et* $\perp : \Lambda^k(\mathbb{R}^6) \to \Lambda^{k-2}(\mathbb{R}^6)$ *est l'opérateur associé à la forme symplectique* $i_u(\phi)$.

Deuxième partie

Applications géométriques

CHAPITRE 3

Equivalence locale des équations de Monge-Ampère

Soit M une variété lisse de dimension n et T^*M son fibré cotangent. Considérons deux équations de Monge-Ampère symplectiques $\Delta_{\omega_1} = 0$ et $\Delta_{\omega_2} = 0$ sur M avec $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^n_\varepsilon(T^*M)$.

Quelles conditions faut-il imposer à ω_1 et ω_2 pour qu'il existe un symplectomorphisme local $F : (T^*M, \Omega) \to (T^*M, \Omega)$ tel que $F^*\omega_1 = \omega_2$?

Le problème étant local, on peut supposer que $M = \mathbb{R}^n$. Nous supposerons de plus que $\omega_1 \in \Omega^n(T^*\mathbb{R}^{2n})$ est à coefficients constants et vérifie de plus

$$\mathcal{G}^{(1)}_{\omega_1} = \{0\}$$

(c'est notamment le cas si $n = 3$ et si ω_1 est non dégénérée au sens de Hitchin, voir proposition 2.11). Cela s'avèrera essentiel dans notre approche du problème.

Soit $J^1(2n, 2n)$ l'espace des 1-jets d'applications lisses $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$. Définissons le système d'équations différentielles $\mathcal{E} \subset J^1(2n, 2n)$ par

$$\mathcal{E} = \left\{ [F]^1_q : [F^*\omega_1 - \omega_2]^0_q = 0 \text{ et } [F^*\Omega - \Omega]^0_q = 0 \right\}.$$

Il existe une solution à notre problème d'équivalence locale au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ si et seulement si $\mathcal{E}$ possède une solution locale de condition initiale $F(0) = 0$.

Nous déterminons dans ce chapitre des conditions d'obstruction à l'intégrabilité de ce système différentiel. L'idée est de construire pas à pas le développement de Taylor d'une solution éventuelle en modifiant une solution "d'ordre k" pour construire une solution d'ordre $k + 1$. Cette approche s'inspire de la technique dite d'*Intégrabilité Formelle* ([**Go**]) mais l'hypothèse $\mathcal{G}^{(1)}_{\omega_1} = 0$ permet de conclure sans utiliser les critères de Goldschmidt. Nous donnons une autre description de ces obstructions quand $n = 3$ pour aboutir finalement au théorème suivant

THEOREME 3.1. *Soit $\Delta_\omega = 0$ une équation de Monge-Ampère non dégénérée en dimension 3 associée à une forme effective ω. Si pour tout $q \in \mathbb{R}^3$ la forme $[\omega]^2_q = \omega^0 + \omega^1 + \omega^2$ satisfait les relations*

$$\begin{cases} \omega^1 = L_{X_h}\omega^0 \\ \omega^2 = \dfrac{1}{2}(L_{X_h}\omega^1 + L_{X_k}\omega^0), \end{cases}$$

avec $h \in S^3(\mathbb{R}^6)$ et $k \in S^4(\mathbb{R}^6)$ alors cette équation différentielle est symplectiquement équivalente à une et une seule des équations de Monge-Ampère

$$\begin{cases} \mathrm{hess}(f) = 1 \\ \Delta(f) - \mathrm{hess}(f) = 0 \\ \Box(f) + \mathrm{hess}(f) = 0. \end{cases}$$

REMARQUE 3.2. *La condition d'intégrabilité énoncée dans ce théorème est une condition d'ordre* 2 *sur la forme* ω. *Nous verrons dans le chapitre suivant comment interpréter cette condition de façon plus géométrique.*

Nous adaptons en fait un résultat de Lychagin et Roubtsov ([**LR3**]) sur ce problème d'équivalence locale des équations de Monge-Ampère en dimension 3. Nous simplifions l'énoncé et la démonstration de leur théorème en nous restreignant aux orbites non dégénérées. Ce résultat a fait l'objet d'un article accepté pour publication ([**Ba1**]).

1. Eléments de la théorie géométrique des équations différentielles

Nous rappelons ici quelques éléments de la géométrie des espaces de jets et des équations différentielles. Nous nous basons essentiellement sur le livre [**AVL**] de Alekseevskij, Vinogradov et Lychagin.

Soit $J^k(n,m)$ l'espace des k-jets des applications lisses $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$J^k(n,m) = \Big\{[f]_q^k : q \in \mathbb{R}^n \text{ et } f \in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\Big\},$$

où $[f]_q^k$ est le développement de Taylor à l'ordre k en q de f. Nous choisissons comme système de coordonnées sur $J^k(n,m)$ les fonctions

$$\Big(q_1,\dots,q_n,u_1,\dots,u_m,p_\sigma^i, 1 \le i \le m, |\sigma| \le k\Big),$$

où

$$\begin{cases} q_i([f]_q^k) = q_i(q) \\ u_i([f]_q^k = f_i(q) \\ p_\sigma^i([f]_q^k) = \dfrac{\partial^{|\sigma|} f_i}{\partial q_1^{\sigma_1}\cdots\partial q_n^{\sigma_n}}(q). \end{cases}$$

Nous noterons parfois $p^i_{(0,\dots,0)} = u_i$ pour simplifier les formules. Nous noterons $\pi_{k,l}$ la projection naturelle $J^k(n,m) \to J^l(n,m)$ pour $k > l$.

Un système d'équations différentielles d'ordre k en la fonction $h(q)$ s'écrit

$$F_s\Big(q, h(q), \dots, \frac{\partial^{|\sigma|}h}{\partial x^\sigma}, \dots\Big) = 0,$$

pour $|\sigma| \le k$ et s prenant un nombre fini de valeurs. Un tel système peut donc être vu comme un sous-ensemble fermé $\mathcal{E} = \{F_s = 0, s = 1,\dots,r\}$ de $J^k(n,m)$. Une solution est alors une sous-variété de la forme J_F^k et contenue dans $\mathcal{E}$, J_F^k étant l'image dans $J^k(n,m)$ de la section $j^k(F) : q \mapsto [F]_q^k$ associée à une application lisse F.

1.1. La distribution de Cartan.

DEFINITION 3.3. *La distribution de Cartan sur* $J^k(n,m)$ *est la distribution lisse* $C : \theta = [f]_q^k \mapsto C(\theta)$, $C(\theta)$ *étant le sous-espace vectoriel de* $T_\theta J^k(n,m)$ *engendré par la réunion des* $T_\theta J_g^k$ *avec* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *vérifiant* $[g]_q^k = \theta$:

$$C(\theta) = \mathrm{vect}\Big(\bigcup_{j_q^k(g)=\theta} T_\theta J_g^k\Big)$$

On peut vérifier que la distribution C est définie comme l'annulateur de la famille de formes

$$\left\{\omega^i_\sigma = dp^i_\sigma - \sum_{j=1}^{n} p^i_{\sigma+1_j} dq_j\right\}_{\substack{i=1,\dots,n\\ 0\leq|\sigma|\leq k-1}}$$

(on note $\sigma + 1_j = (\sigma_1, \dots, \sigma_j + 1, \dots, \sigma_n)$).

Les sous-variété intégrales de la distribution de Cartan sont en général localement de la forme J^k_F :

PROPOSITION 3.4. *Une sous-variété $L \overset{i}{\hookrightarrow} J^k(n,m)$ est localement de la forme $L = J^k_F$ si et seulement si*

(1) L se projette localement difféomorphiquement sur $\mathbb{R}^n$ i.e. $\pi \circ i : L \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme local.

(2) L est une sous-variété intégrale de la distribution de Cartan : pour tout $\theta \in L$, $T_\theta L$ est contenu dans $C(\theta)$.

COROLLAIRE 3.5. *Une solution d'un système d'équations différentielles*

$$\mathcal{E} \subset J^k(n,m)$$

est une sous-variété intégrale de la distribution de Cartan contenue dans $\mathcal{E}$ et se projettant difféomorphiquement sur $\mathbb{R}^n$.

1.2. Prolongation d'équations différentielles. En dérivant les équations d'un système d'équations différentielles on peut parfois parvenir à une contradiction et donc montrer que le système n'est pas intégrable. Ceci se formalise en introduisant la notion de prolongation d'un système d'équations différentielles.

DEFINITION 3.6. *Soit $\mathcal{E} \subset J^k(n,m)$ un système d'équations différentielles défini par $F_1 = \dots = F_r = 0$. La première prolongation de $\mathcal{E}$ est l'équation différentielle $\mathcal{E}^{(1)} \subset J^{k+1}(n,m)$ définie par*

$$\begin{cases} F_s = 0 & s = 1, \dots, r \\ D_j F_s = 0 & j = 1, \dots, n,\ s = 1, \dots, r. \end{cases}$$

où D_j est la dérivation dite totale :

$$D_j = \frac{\partial}{\partial q_j} + \sum_{\substack{i=1,\dots,n\\ 0\leq|\sigma|\leq k}} p^i_{\sigma+1_j} \frac{\partial}{\partial p^i_\sigma}$$

REMARQUE 3.7. *Soit $\theta_{k+1} = [f]^{k+1}_q \in J^{k+1}(n,m)$ et θ_k son projeté sur $J^k(n,m)$. Puisque*

$$T_q j^k(f)(\frac{\partial}{\partial q_j}) = \frac{\partial}{\partial q_j} + \sum_{\substack{i=1,\dots,n\\ 0\leq|\sigma|\leq k}} p^i_{\sigma+1_j}(\theta_{k+1}) \frac{\partial}{\partial p^i_\sigma},$$

il vient

$$T_{\theta_k} F_s \circ T_q j^k(f)(\frac{\partial}{\partial q_j}) = \frac{\partial F_s}{\partial q_j}(\theta_k) + \sum_{\substack{i=1,\dots,n\\ 0\leq|\sigma|\leq k}} p^i_{\sigma+1_j}(\theta_{k+1}) \frac{\partial F_s}{\partial p^j_\sigma}(\theta_k).$$

Autrement dit

$$\frac{\partial F_s \circ j^k(f)}{\partial q_j}(q) = T_{\theta_k}\Big(F_s \circ j^k(f)\Big)(\frac{\partial}{\partial q_j}) = D_j F_i(\theta_{k+1}).$$

Ainsi $\theta_{k+1} = [f]_q^{k+1} \in \mathcal{E}^{(1)}$ *si et seulement le plan* $T_{\theta_k} J_f^k$ *est contenu dans* $T_{\theta_k}\mathcal{E}$ *:* $\mathcal{E}^{(1)}$ *est l'ensemble des plans de la forme* $T_{\theta_k} J_f^k$ *(les R-plans) tangents à* $\mathcal{E}$*.*

DEFINITION 3.8. *On définit par récurrence pour* $l \geq 1$

$$\mathcal{E}^{(l)} = (\mathcal{E}^{(l-1)})^{(1)}.$$

Cette prolongation $\mathcal{E}^{(l)}$ est caractérisé par

$$\begin{cases} F_s = 0 \\ D^\tau F_s = 0, \end{cases}$$

où $s = 1, \dots, r$, $|\tau| \leq l$ et

$$D^\tau = D_1^{\tau_1} \circ \cdots \circ D_n^{\tau_n}.$$

1.3. Symbole d'une équation différentielle. Le symbole d'une équation différentielle caractérise ses termes de plus haut degré. Il mesure en quelque sorte la différence entre cette équation et sa prolongation.

Soit $\mathcal{E} = \{F_1 = \cdots = F_r = 0\} \subset J^k(n,m)$ un système d' équations différentielles. On note pour $\theta \in \mathcal{E}$,

$$T_\theta \mathcal{E} = Ker(T_\theta F)$$

où $F = (F_1, \dots, F_r)$.

Notons $\mathcal{F}(\theta)$ la fibre de $\pi_{k,k-1}$ au dessus de $\pi_{k,k-1}(\theta)$ pour $\theta \in J^k(n,m)$.

DEFINITION 3.9. *Le symbole du système d'équations différentielles* $\mathcal{E}$ *est la distribution de sous-espaces vectoriels*

$$g : \theta \in \mathcal{E} \mapsto T_\theta \mathcal{E} \cap T_\theta \mathcal{F}(\theta) \subset T_\theta J^k(n,m),$$

i.e.

$$g(\theta) = \Big\{ \big(X_\sigma^i\big)_{\substack{i=1,\dots,n \\ |\sigma|=k}} \in S^k(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{R}^m : \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ |\sigma|=k}} X_\sigma^i \frac{\partial F_s(\theta)}{\partial p_\sigma^i} = 0, \ \forall s = 1, \dots, r \Big\}.$$

Notons $g^{(1)}(\theta_{k+1})$ le symbole de $\mathcal{E}^{(1)}$ en θ_{k+1}. Soit $\theta_k = \pi_{k+1,k}(\theta_{k+1})$ et choisissons un n-uplet σ de longueur $k+1$ et i un entier compris entre 1 et n. Pour $s = 1, \dots, r$, F_s est une fonction sur $J^k(n,m)$ et donc

$$\frac{\partial F_s}{\partial p_\sigma^i} = 0.$$

D'où

$$\frac{\partial D_j F_s}{\partial p_\sigma^i} = \frac{\partial F_s}{\partial p_{\sigma - 1_j}^i}.$$

Et donc

$$g^{(1)}(\theta_{k+1}) = \Big\{ \big(X_\sigma^i\big)_{\substack{i=1,\dots,n \\ |\sigma|=k+1}} \in S^{k+1}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{R}^m : \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ |\sigma|=k+1}} X_\sigma^i \frac{\partial F_s(\theta_k)}{\partial p_{\sigma-1_j}^i} = 0 \Big\}_{\substack{s=1,\dots,r \\ j=1,\dots,n}}.$$

En particulier $g^{(1)}(\theta_{k+1})$ ne dépend que de θ_k.

DEFINITION 3.10. *La l-ième prolongation du symbole $g(\theta)$ de $\mathcal{E}$ en θ est le symbole de $\mathcal{E}^{(l)}$ en θ_{k+l}, θ_{k+l} étant un antécédent de θ pour la projection $\pi_{k+l,k}$.*

2. Intégrabilité de l'équation différentielle $\mathcal{E}$

Revenons maintenant à notre système d'équations différentielles

$$\mathcal{E} = \left\{[F]^1_q : [F^*\omega_1 - \omega_2]^0_q = 0 \text{ et } [F^*\Omega - \Omega]^0_q = 0\right\} \subset J^1(2n, 2n).$$

ω_1 étant une forme *à coefficients constants.*

REMARQUE 3.11. *Nous appelons k-jet d'une forme différentielle*

$$\omega = \sum_i a_i dq_{i_1} \wedge \cdots \wedge dq_{i_p} \in \Omega^p(\mathbb{R}^m)$$

la forme

$$[\omega]^k_q = \sum_i [a_i]^p_q dq_{i_1} \wedge \cdots \wedge dq_{i_p}.$$

Si $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est une application lisse alors

$$[F^*\omega]^k_q = [\left([F]^{k+1}_q\right)^* [\omega]^k_{F(q)}]^k_q.$$

Posons $m = 2n$ et notons (q, u, p) le système de coordonnées naturel de $J^1(m, m)$ avec

$$\begin{cases} q_i([f]^1_q) = q_i(q), & i = 1, \dots, m \\ u_i([f]^1_q) = f_i(q), & i = 1, \dots, m \\ p_{ij}([f]^1_q) = \dfrac{\partial f_i(q)}{\partial p_j}, & i, j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Nous notons $\mathcal{E} = \{L_1 = \cdots = L_r = L_{r+1} = \cdots = L_{r+s} = 0\}$ avec

$$\begin{cases} [F^*\omega_1 - \omega_2]^0_q = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} L_i([F]^1_q)\alpha_i, & \Big(\alpha_i\Big)_{i=1}^{r} \text{ base de } \Lambda^n(\mathbb{R}^m) \\ [F^*\Omega - \Omega]^0_q = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} L_{r+i}([F]^1_q)\beta_i, & \Big(\beta_i\Big)_{i=1}^{r} \text{ base de } \Lambda^2(\mathbb{R}^m). \end{cases}$$

REMARQUE 3.12. *Une condition nécessaire pour que $\mathcal{E}$ soit intégrable est que $\omega_{2,q}$ soit dans la $Sp(n)$-orbite de ω_1 en tout point q de $\mathbb{R}^m$. L'équation $\mathcal{E}$ est dans ce cas un fibré principal au dessus de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ de fibre $G_{\omega_1} = \{F \in Sp(n) : F^*\omega_1 = \omega_1\}$ et est en particulier une sous-variété lisse de $J^1(m, m)$.*

2.1. Le symbole de $\mathcal{E}$.

PROPOSITION 3.13. *Soit $\theta = [F]^1_{q_0} \in \mathcal{E}$. Notons $F'(q_0)$ la matrice du symplectomorphisme $T_{q_0}F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Soit $g(\theta) \subset \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m$ le symbole de $\mathcal{E}$ en θ et soit $\mathcal{G}_{\omega_1} \subset \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m$ le stabilisateur de ω_1 pour l'action de $Sp(n)$.*

L'application $\xi : \mathcal{G}_{\omega_1} \to g(\theta)$ définie par

$$\xi(X) = X.F'(q_0)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. Soit $H = \big(h_{ij}\big)_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m$. Le tenseur H appartient au symbole $g(\theta)$ si et seulement si pour tout k,

$$\sum_{i,j=1}^m h_{ij} \frac{\partial L_k(\theta)}{\partial p_{ij}} = 0.$$

Identifions H à l'application lisse $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ définie par

$$H(q) = \big(\sum_{j=1}^m h_{1j}(q_j - q_j^0), \dots, \sum_{j=1}^m h_{mj}(q_j - q_j^0)\big),$$

et posons $F_t = F + tH$ pour $t \in \mathbb{R}$. Comme pour tout k

$$\frac{d}{dt} L_k([F_t]^1_{q_0})|_{t=0} = \sum_{i,j=1}^m h_{ij} \frac{\partial L_k(\theta)}{p_{ij}},$$

on en déduit que $H \in g(\theta)$ si et seulement si

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^r L_k([F_t]^1_{q_0})\alpha_k}{t} = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^s L_{k+r}([F_t]^1_{q_0})\beta_k}{t} = 0 \end{cases}$$

i.e. si et seulement si

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{[F_t^*\omega_1 - \omega_2]^0_{q_0}}{t} = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{[F_t^*\Omega - \Omega]^0_{q_0}}{t} = 0. \end{cases}$$

Or $[F]^1_{q_0} \in \mathcal{E}$ et ω_1 et Ω sont à coefficients constants. Donc

$$\begin{cases} [F_t^*\omega_1 - \omega_2]^0_{q_0} = (T_{q_0}F_t)^*\omega_1 - (T_{q_0}F)^*\omega_1 \\ [F_t^*\Omega - \Omega]^0_{q_0} = (T_{q_0}F_t)^*\Omega - (T_{q_0}F)^*\Omega. \end{cases}$$

Ainsi finalement $H \in g(\theta)$ si et seulement si

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\phi_t^*\omega_1 - \phi_0^*\omega_1}{t} = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\phi_t^*\Omega - \phi_0^*\Omega}{t} = 0. \end{cases}$$

Puisque $\phi_t : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est l'application linéaire définie par

$$\phi_t^{ij} = \frac{\partial F_i(q_0)}{\partial q_j} + th_{ij}.$$

Comme ϕ_t est le flot du champ de vecteur $X = H.(F'(q_0))^{-1}$, on en déduit que $H \in g(\theta)$ si et seulement si

$$\begin{cases} L_X\omega_1 = 0 \\ L_X\Omega = 0 \end{cases}$$

i.e. si et seulement si $X \in \mathcal{G}_{\omega_1}$. □

COROLLAIRE 3.14. *Soit* $\theta = [F]^1_{q_0} \in \mathcal{E}$. *Alors*

$$g^{(1)}(\theta) = \mathcal{G}^{(1)}_{\omega_1}.F'(q_0).$$

DÉMONSTRATION. Par définition,

$$g^{(1)}(\theta) = \Big\{ \big(h^k_{ij}\big) \in S^2(\mathbb{R}^m) \otimes \mathbb{R}^m : \sum_{i,k} h^k_{ij} \frac{\partial L_l(\theta)}{\partial p_{ik}} = 0, \ \forall j, l \Big\}.$$

Autrement dit,

$$g^{(1)}(\theta) = \Big\{ \big(h^k_{ij}\big) : h^k_{ij} = h^k_{ji} \text{ et } \big(h^k_{ij}\big)_{i,k} \in g(\theta) \Big\}.$$

et donc

$$\begin{aligned} &g^{(1)}(\theta).\big(F'(q_0)\big)^{-1} \\ &\quad = \Big\{ \big(X^k_{ij}\big) : X^k_{ij} = X^k_{ji} \text{ et } \big(X^k_{ij}\big)_{i,k} = \big(h^k_{ij}\big).\big(F'(q_0)\big)^{-1} \in \mathcal{G}_{\omega_1} \Big\} \\ &\quad = \mathcal{G}^{(1)}_{\omega_1}. \end{aligned}$$

□

2.2. Le fibré $\mathcal{E}^{(k+1)} \to \mathcal{E}^{(k)}$. Nous allons maintenant étudier la surjectivité de la projection

$$\mathcal{E}^{(k+1)} \overset{\pi_{k+2,k+1}}{\longrightarrow} \mathcal{E}^{(k)}.$$

Commençons tout d'abord par donner une expression plus simple de la prolongation de $\mathcal{E}$.

LEMME 3.15.

$$\mathcal{E}^{(k)} = \Big\{ [F]^{k+1}_q : [F^*\omega_1 - \omega_2]^k_q = 0 \ \textit{et} \ [F^*\Omega - \Omega]^k_q = 0 \Big\}.$$

DÉMONSTRATION. Par définition

$$\mathcal{E}^{(1)} = \Big\{ Li = 0, D_j L_i = 0 \Big\} \subset J^2(m, m),$$

avec $D_j L_i([F]^2_q) = \frac{\partial L_j \circ j^1(F)}{\partial q_j}(q)$. Or

$$\big(F^*\omega_1 - \omega_2\big)(q) = \sum_{i=1}^{r} L_i \circ j^1(F)(q) \alpha_i.$$

Donc $[F^*\omega_1 - \omega_2]^1_q = 0$ si et seulement si pour tout $i = 1, \ldots, m$ et tout $j = 1, \ldots, r$

$$\begin{cases} L_j \circ j^1(F)(q) = 0 \\ \dfrac{\partial L_j \circ j^1(F)}{\partial q_i}(q) = 0. \end{cases}$$

Et de la même façon, $[F^*\Omega - \Omega]^1_q = 0$ si et seulement si pour tout $i = 1, \ldots, m$ et tout $j = r+1, \ldots, r+s$

$$\begin{cases} L_j \circ j^1(F)(q) = 0 \\ \dfrac{\partial L_j \circ j^1(F)}{\partial q_i}(q) = 0. \end{cases}$$

Le lemme se démontre alors par une récurrence immédiate. □

Nous aurons aussi besoin d'un lemme technique très utile pour la suite et que nous démontrons dans l'annexe C :

LEMME 3.16. *Soit $P = (P_1, \ldots, P_m) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, les P_i étant des polynômes de degré $k+1$ homogènes en $x - q$ avec $q \in \mathbb{R}^m$. Soit le champ de vecteurs*

$$X = \sum_{i=1}^{m} P_i \frac{\partial}{\partial q_i}$$

et soit ω une forme différentielle sur $\mathbb{R}^m$. Alors

$$[(Id + P)^* \omega]_q^k = [\omega]_q^k + L_X([\omega]_q^0).$$

Définissons maintenant l'application $c_k : S^{k+2}(\mathbb{R}^m) \to \Omega^n(\mathbb{R}^m)$ par

$$c_k(h) = L_{X_h} \omega_1,$$

X_h étant le champ hamiltonien d'hamiltonien h. En particulier, X_h est un champ de vecteurs à coefficients polynomiaux homogènes de degré $k+1$. Donc

$$\begin{aligned} \Big\{X_h : h \in \mathrm{Ker}(c_k)\Big\} &= \Big\{X \in \mathbb{R}^m \otimes S^{k+1}(\mathbb{R}^m) : L_X \Omega = L_X \omega_1 = 0\Big\} \\ &= \Big(\mathbb{R}^m \otimes S^{k+1}(\mathbb{R}^m)\Big) \bigcap \Big(\mathcal{G}_{\omega_1} \otimes S^k(\mathbb{R}^m)\Big), \end{aligned}$$

i.e.

$$h \in \mathrm{Ker}(c_k) \Leftrightarrow X_h \in \mathcal{G}_{\omega_1}^{(k)}.$$

Notons pour $\theta = [F]_q^k \in \mathcal{E}^{(k-1)}$

$$\sigma_k(\theta) = [\omega_1 - F^{-1*} \omega_2]_{F(q)}^k,$$

F étant l'unique représentant de θ tel que

$$[F]_q^{k+1} = [F]_q^k.$$

Notons de plus $\overline{\sigma_k(\theta)}$ la classe de $\sigma_k(\theta)$ modulo l'image de c_k :

$$\overline{\sigma_k(\theta)} = 0 \Leftrightarrow \exists h \in S^{k+2} : \sigma_k(\theta) = L_{X_h} \omega_1.$$

PROPOSITION 3.17. *Soit $\theta \in \mathcal{E}^{(k-1)}$. Il existe $\theta' \in \mathcal{E}^{(k)}$ tel que*

$$\pi_{k+1,k}(\theta') = \theta$$

si et seulement si $\overline{\sigma_k(\theta)} = 0$.

Démonstration. Choisissons un représentant $F = (F_1, \ldots, F_m)$ de θ tel que les F_i soient des polynômes de degré inférieur ou égal à k :

$$[F]_{q_0}^{k+1} = [F]_{q_0}^k = \theta.$$

Comme

$$\begin{cases} [F^* \Omega]_{q_0}^{k-1} = \Omega \\ [F^* \omega_1]_{q_0}^{k-1} = [\omega_2]_{q_0}^{k-1}, \end{cases}$$

on en déduit d'après la remarque 3.11 que

$$\begin{cases} [F^* \Omega]_{q_0}^{k} = \Omega \\ [F^* \omega_1]_{q_0}^{k} = [\omega_2]_{q_0}^{k-1}. \end{cases}$$

Posons de plus $q_1 = F(q_0)$.

Supposons qu'il existe $\theta' = [G]_{q_0}^{k+1} \in \mathcal{E}^{(k)}$ tel que $[G]_{q_0}^k = [F]_{q_0}^k$. Posons alors $\eta = F \circ G^{-1}$:

$$[\eta]_{q_1}^{k+1} = Id + P,$$

avec $P = (P_1, \ldots, P_m)$, les P_i étant des polynômes de degré $k+1$ homogènes en $x - q_1$. Soit le champ de vecteurs

$$X = \sum_{i=1}^{m} P_i \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

X est un champ hamiltonien. En effet, d'après 3.16

$$\begin{aligned} L_X \Omega &= [\eta^* \Omega]^k_{q_1} - [\Omega]^k_{q_1} \\ &= [G^{-1*} F^* \Omega]^k_{q_1} - \Omega \\ &= [\big([G^{-1}]^{k+1}_{q_1}\big)^* [F^*\Omega]^k_{q_0}]^k_{q_1} - \Omega \\ &= [G^{-1*}\Omega]^k_{q_1} - \Omega \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi il existe $h \in S^{k+2}(\mathbb{R}^m)$ tel que $X = X_h$. De plus,

$$\begin{aligned} 0 &= [\omega_1 - G^{-1*}\omega_2]^k_{q_1} \\ &= [\omega_1 - \eta^* F^{-1*}\omega_2]^k_{q_1} \\ &= [\omega_1 - \eta^*\omega_1]^k_{q_1} + [\eta^*(\omega_1 - F^{-1*}\omega_2)]^k_{q_1}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{cases} L_X\omega_1 = [\eta^*\omega_1 - \omega_1]^k_{q_1} \\ [\eta^*(\omega_1 - F^{-1*}\omega_2)]^k_{q_1} = [\omega_1 - F^{-1*}\omega_2]^k_{q_1} \end{cases}$$

puisque $[\omega_1 - F^{-1*}\omega_2]^0_{q_1} = 0$. Finalement

$$\sigma_k(\theta) = L_{X_h}\omega_1$$

avec $h \in S^{k+2}(\mathbb{R}^m)$.

Réciproquement supposons que $[\omega_1 - F^{-1*}\omega_2]^k_{q_1} = L_{X_h}\omega_1$, $h \in S^{k+2}(\mathbb{R}^m)$. Soit $\eta = Id + P$ avec

$$X_h = \sum_{i=1}^{m} P_i \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

Comme $[\eta^*\Omega - \Omega]^k_{q_1} = L_{X_h}\Omega = 0$, $T_{q_1}\eta$ est un symplectomorphisme et donc η est un difféomorphisme local au voisinage de q_1. Définissons alors le germe d'application $G = \eta^{-1} \circ F$. On a bien sûr $[G]^k_{q_0} = [F]^k_{q_0}$. Vérifions maintenant que $[G]^{k+1}_{q_0} \in \mathcal{E}^{(k)}$:

$$\begin{aligned} [\Omega - G^{-1*}\Omega]^k_{q_1} &= [\Omega - \eta^*\Omega]_{q_1} + [\eta^*(\Omega - F^{-1*}\Omega)]^k_{q_1} \\ &= [\Omega - F^{-1*}\Omega]^k_{q_1} + L_{X_h}([\Omega - F^{-1*}\Omega]^0_{q_0}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [\omega_1 - G^{-1*}\omega_2]^k_{q_1} &= [\omega_1 - \eta^*\omega_1]_{q_1} + [\eta^*(\omega_1 - F^{-1*}\omega_2)]^k_{q_1} \\ &= -L_{X_h}\omega_1 + [\omega_1 - F^{-1*}\omega_2]^k_{q_1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 3.18. *Si $\mathcal{J}^{(k)}_{\omega_1} = 0$ et si $\overline{\sigma_k(\theta)} = 0$ autour de $\theta_0 \in \mathcal{E}^{(k-1)}$ alors la projection $\pi_{k+1,k} : \mathcal{E}^{(k)} \to \mathcal{E}^{(k-1)}$ est un difféomorphisme local au voisinage de θ_0.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, $\pi_{k+1,k} : \mathcal{E}^{(k)} \to \mathcal{E}^{(k-1)}$ est surjective. De plus

$$\mathrm{Ker}(T_\theta \pi_{k+1,k}) \cap T_\theta \mathcal{E}^{(k)} = g^{(k)}(\theta).$$

Or $g^{(k)}(\theta)$ est isomorphe à $\mathcal{J}^{(k)}_{\omega_1}$ qui est trivial. Donc $\pi_{k+1,k} : \mathcal{E}^{(k)} \to \mathcal{E}^{(k-1)}$ est une immersion surjective au voisinage de θ_0 : c'est un difféomorphisme local. $\square$

2.3. Intégrabilité de la distribution de Cartan restreinte à $\mathcal{E}^{(1)}$. Une distribution $\mathcal{F}$ de dimension p sur une variété lisse M est la donnée d'une famille $\big(\mathcal{F}(x) \subset T_x M\big)_{x \in M}$ de sous-espaces vectoriels de dimension k dépendant de manière lisse de x : pour tout $x_0 \in M$ il existe des germes de champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_p$ définis au voisinage de x_0 tels que pour tout x dans un voisinage de x_0, $\{X_1(x), \ldots, X_p(x)\}$ est une base de $\mathcal{F}(x)$.

Une sous-variété L de M est une sous-variété intégrale de la distribution $\mathcal{F}$ si pour tout $x \in L$, $T_x L$ est un sous-espace de $\mathcal{F}(x)$.

$\mathcal{F}$ est dite complètement intégrable si pour tout $x \in M$ il existe une sous-variété intégrale de $\mathcal{F}$ de dimension p et contenant x. La distribution de Cartan par exemple est une distribution *non intégrable* sur $J^k(n,m)$.

Un théorème fondamental de Frobenius dit qu'une distribution $\mathcal{F}$ sur une variété M est complètement intégrable si et seulement si l'espace des champs de vecteurs à valeurs dans $\mathcal{F}$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M.

Revenons maintenant à notre système différentiel

$$\mathcal{E} = \Big\{[F]^1_q \in J^1(m,m) : [F^*\omega_1 - \omega_2]^0_q = 0 \text{ et } [F^*\Omega = \Omega]^0_q = 0\Big\},$$

ω_1 étant une forme à coefficients constants vérifiant $\mathcal{G}^{(1)}_{\omega_1} = 0$ et ω_2 étant une forme différentielle telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, $\omega_{2,x}$ est dans l'orbite de ω_1 pour l'action de $Sp(n)$.

PROPOSITION 3.19. *Si $\overline{\sigma_1}$ et $\overline{\sigma_2}$ sont nuls, alors la restriction*

$$C_{\mathcal{E}} : \theta \in \mathcal{E}^{(1)} \mapsto C(\theta) \cap T_\theta \mathcal{E}^{(1)}$$

de la distribution de Cartan à $\mathcal{E}^{(1)}$ est complètement intégrable.

Démonstration. D'après 3.18 les projections $\mathcal{E}^{(2)} \overset{\pi_{3,2}}{\to} \mathcal{E}^{(1)}$ et $\mathcal{E}^{(1)} \overset{\pi_{2,1}}{\to} \mathcal{E}$ sont des difféomorphismes. Notons $\xi_{2,3}$ et $\xi_{1,2}$ leurs inverses.

Notons $L(\theta) = J^2_F \subset J^2(m,m)$ avec $[F]^3_q = \xi_{2,3}(\theta) \in \mathcal{E}^{(2)}$ pour $\theta \in \mathcal{E}^{(1)}$.

Par définition, $[F]^3_q \in \mathcal{E}^{(2)}$ si et seulement si $T_q J^2_F \subset T_\theta \mathcal{E}^{(1)}$ et donc $T_\theta L(\theta)$ est contenu dans $C_{\mathcal{E}}(\theta)$. Soit maintenant $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ telle que $[G]^2_q = \theta$. Une base de $T_\theta J^2_G$ est

$$\Big\{T_q j^2(G)(\frac{\partial}{\partial q_i})\Big\}_{i=1,\ldots,m}$$

avec

$$T_q j^2(G)(\frac{\partial}{\partial q_i}) = \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial G_j(q)}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 G_j(q)}{\partial q_i \partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_{jk}}$$
$$+ \sum_{j,k,l=1}^m \frac{\partial^3 G_j(q)}{\partial q_i \partial q_k \partial q_l}\frac{\partial}{\partial p_{jkl}}.$$

Ainsi, puisque $[G]_q^2 = [F]_q^2$, tout élément X de $T_\theta J^2 G \cap T_\theta \mathcal{E}^{(1)}$ peut s'écrire $X = X_L + X'$ avec $X_L \in T_\theta J^2 F$ et $X' \in \mathrm{Ker}(T_\theta \pi_{2,1})$. Or $T_\theta J^2(F) \subset T_\theta \mathcal{E}^{(1)}$, donc $X' \in \mathrm{Ker}(T_\theta \pi_{2,1}) \cap T_\theta \mathcal{E}^{(1)} = \{0\}$. Finalement

$$T_\theta J_G^2 \cap T_\theta \mathcal{E}^{(1)} \subset T_\theta L(\theta)$$

pour tout G tel que $[G]_q^2 = \theta$. On conclut alors que

$$C_\mathcal{E}(\theta) = T_\theta L(\theta).$$

Notons pour $i = 1, \ldots, m$ l'application $\phi_i : J^3(m,m) \to TJ^2(m,m)$ définie par

$$\phi_i([F]_q^3) = T_q j^2(F)(\frac{\partial}{\partial q_i}).$$

L'application $\xi_{2,3} : \mathcal{E}^{(1)} \to \mathcal{E}^{(2)}$ permet de construire la famille de champs de vecteurs sur $\mathcal{E}^{(1)}$

$$X_i(\theta) = \phi_i(\xi_{2,3}(\theta)), i = 1, \ldots, m.$$

Pour tout $\theta \in \mathcal{E}^{(1)}$, $\{X_1(\theta), \ldots, X_m(\theta)\}$ constitue une base de $C_\mathcal{E}(\theta)$. Calculons le crochet de Lie dans cette base. Puisque

$$X_a = \frac{\partial}{\partial q_a} + \sum_{j=1}^m p_{ja} \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{j,k=1}^m p_{jka} \frac{\partial}{\partial p_{jk}} + \sum_{j,k,l=1}^m p_{jkla} \frac{\partial}{\partial p_{jkl}},$$

il vient

$$[X_a, X_b] = \sum_{j=1}^m (p_{jba} - p_{jab}) \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{j,k=1}^m (p_{jkba} - p_{jkab}) \frac{\partial}{\partial p_{jk}}.$$

Or $p_{jab} = p_{jba}$ et $p_{jkba} = p_{jkab}$ et donc $[X_a, X_b] = 0$. Ainsi l'espace des champs de vecteurs à valeurs dans $C_\mathcal{E}$ est stable par [,] : d'après le théorème de Frobenius, $C_\mathcal{E}$ est intégrable. □

COROLLAIRE 3.20. *Si $\mathcal{G}_{\omega_1}^{(1)} = 0$ et si $\overline{\sigma_1} = \overline{\sigma_2} = 0$ dans un voisinage de $\theta_0 \in \mathcal{E}^{(1)}$ alors il existe une solution locale de $\mathcal{E}$ passant par θ_0.*

DÉMONSTRATION. Soit L une sous-variété intégrale de degré m de $C_\mathcal{E}$ passant par θ_0. C'est une sous-variété intégrale de la distribution de Cartan et la projection $\pi_{2,0} : L \to \mathbb{R}^m$ est un difféomorphisme local puisque au voisinage de θ_0, $T_\theta(L) = C_\mathcal{E}(\theta)$ est de la forme $T_\theta J_F^2$. Il existe donc H tel que localement $L = J_H^2 : H$ est une solution de $\mathcal{E}$ passant par θ_0. □

3. Une autre expression des obstructions

Nous allons maintenant donner une expression plus explicite de ces obstructions $\overline{\sigma_1}$ et $\overline{\sigma_2}$. Nous aurons alors démontré le théorème 3.1.

Nous noterons pour $\omega \in \Omega^p(\mathbb{R}^m)$

$$[\omega]_q^k = \omega^0 + \omega^1 + \cdots + \omega^k,$$

ω^i étant une forme différentielle sur $\mathbb{R}^m$ dont les coefficients sont des polynômes de degré i homogènes en $x - q$.

Nous aurons besoin de plus de deux lemmes techniques :

LEMME 3.21. *Soit $F : M \to N$ un morphisme de variétés lisses, X un champ de vecteurs sur M et $\omega \in \Omega^p(N)$ une forme différentielle sur N. Alors,*

$$F^*_{F_*X}\omega = L_X F^*\omega.$$

LEMME 3.22. *Soit $Q_1, \ldots, Q_6$ des polynômes de degré 2 et homogènes en $x - q_0$ avec $q_0 \in \mathbb{R}^6$. Posons*

$$a^i_{jkl} = \sum_{p=1}^{6} \frac{\partial^2 Q_i(q_0)}{\partial q_p \partial q_k} \frac{\partial^2 Q_p(q_0)}{\partial q_j \partial q_l} + \frac{\partial^2 Q_i(q_0)}{\partial q_p \partial q_j} \frac{\partial^2 Q_p(q_0)}{\partial q_k \partial q_l} + \frac{\partial^2 Q_i(q_0)}{\partial q_p \partial q_l} \frac{\partial^2 Q_p(q_0)}{\partial q_j \partial q_k}$$

et définissons pour $i = 1, \ldots, 6$,

$$V_i(q) = \frac{1}{6} \sum_{j,k,l=1}^{6} a^i_{jkl}(q_j - q^0_j)(q_k - q^0_k)(q_l - q^0_l).$$

Soit

$$\begin{cases} Q = (Q_1, \ldots, Q_6) \\ U = \sum_{i=1}^{6} Q_i \dfrac{\partial}{\partial q_i} \\ V = \sum_{i=1}^{6} V_i \dfrac{\partial}{\partial q_i}. \end{cases}$$

Pour toute forme $\omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^6)$, la relation suivante est vérifiée

$$[(Id + Q)^*\omega]^2_{q_0} - [(Id + Q)^*\omega]^1_{q_0} = \omega^2 + L_U\omega^1 + \frac{1}{2}(L_U L_U \omega^0 - L_V \omega^0)$$

avec $[\omega]^2_{q_0} = \omega^0 + \omega^1 + \omega^2$.

Nous renvoyons le lecteur à l'annexe C pour la démonstration de ces lemmes.

Fixons maintenant ω_1 une 3-forme à coefficients constants et non dégénérée sur $\mathbb{R}^6$ et $\omega_2 \in \Omega^3(\mathbb{R}^6)$ telle que en tout point q de $\mathbb{R}^6$, $\omega_{2,q}$ est dans l'orbite de ω_1. Rappelons que

$$\sigma_k([F]^k_q) = [\omega_1 - F^{-1*}\omega_2]^k_{F(q)}$$

avec $[F]^{k+1}_q = [F]^k_q$.

3.1. L'obstruction $\overline{\sigma_1}$.

PROPOSITION 3.23. *Soit $\theta = [F]^1_{q_0} \in \mathcal{E}$. $\overline{\sigma_1}(\theta) = 0$ si et seulement si il existe $h \in S^3(\mathbb{R}^6)$ tel que*

$$\omega^1_2 = L_{X_h}\omega^0_2$$

avec $[\omega_2]^1_q = \omega^0_2 + \omega^1_2$.

Démonstration. Choisissons un représentant affine F de $[F]^1_{q_0} \in \mathcal{E}$:

$$F : (\mathbb{R}^6, q_0) \to (\mathbb{R}^6, q_1), q \mapsto q_1 + A(q - q_0)$$

avec $A \in Sp(3)$. Puisque $[F]^1_{q_0} \in \mathcal{E}$, il vient

$$\sigma_1(\theta) = [\omega_1 - F^{-1*}(\omega_2)]^1_{q_1} = -F^{-1*}\omega^1_2.$$

Donc $\overline{\sigma_1}(\theta)=0$ si et seulement si il existe $X\in\mathbb{R}^6\otimes S^2(\mathbb{R}^6)$ tel que

$$\begin{cases} L_X\Omega = 0 \\ L_X\omega_1 = F^{-1*}\omega_2^1. \end{cases}$$

Si $X\in\mathbb{R}^6\otimes S^2(\mathbb{R}^6)$ alors $F_*X\in\mathbb{R}^6\otimes S^2(\mathbb{R}^6)$ puisque F est affine. De plus $F^*\omega_1=\omega_2^0$. On conclut donc que $\overline{\sigma_1}(\theta)=0$ si et seulement si il existe $Y\in\mathbb{R}^6\otimes S^2(\mathbb{R}^6)$ tel que

$$\begin{cases} L_Y\Omega = 0 \\ L_Y\omega_2^0 = \omega_2^1. \end{cases}$$

□

3.2. L'obstruction $\overline{\sigma_2}$.

PROPOSITION 3.24. *Soit $\theta=[F]_{q_0}^2\in\mathcal{E}^{(1)}$. $\overline{\sigma_2}(\theta)=0$ si et seulement si il existe $h\in S^3(\mathbb{R}^6)$ et $k\in S^4(\mathbb{R}^6)$ tel que*

$$\begin{cases} \omega_2^1 = L_{X_h}\omega_2^0 \\ \omega_2^2 = \dfrac{1}{2}(L_{X_h}\omega_2^1 + L_{X_k}\omega_2^0). \end{cases}$$

Démonstration. Choisissons un représentant affine F de $\pi_{2,1}(\theta)$ et un représentant polynomial $G=(G_1,\ldots,G_m)$ de θ de degré inférieur ou égal à 2 :

$$\begin{cases} \sigma_1(\pi_{2,1}(\theta)) = [\omega_1 - F^{-1*}\omega_2]_{q_1}^1 \\ \sigma_2(\theta) = [\omega_1 - G^{-1*}\omega_2]_{q_1}^2. \end{cases}$$

De plus $G^{-1}\circ F = Id+Q$, avec $Q=(Q_1,\ldots,Q_m)$, les polynômes Q_i étant de degré 2 et homogènes en $x-q_0$. Soit $\eta = Id+Q$. D'après 3.22,

$$[\eta^*\omega_2]_{q_0}^2 - [\eta^*\omega_2]_{q_0}^1 = \omega_2^2 + L_U\omega_2^1 + \frac{1}{2}(L_UL_U\omega_2^0 - L_V\omega_2^0)$$

avec $U\in\mathbb{R}^6\otimes S^2(\mathbb{R}^6)$ et $V\in\mathbb{R}^6\otimes S^3(\mathbb{R}^6)$.

$[G]_{q_0}^2\in\mathcal{E}^{(1)}$ donc $[\omega_1 - G^{-1*}\omega_2]_{q_1}^1 = [\Omega - G^{-1*}\Omega]_{q_1}^1 = 0$. On en déduit alors en utilisant 3.16 que

$$\begin{cases} \omega_2^1 = L_U\omega_2^0 \\ L_U\Omega = 0. \end{cases}$$

En particulier $U=X_h$ avec $h\in S^3(\mathbb{R}^6)$. On en déduit alors que

$$\sigma_2(\theta) = -F^{-1*}\big(\omega_2^2 - \frac{1}{2}(L_UL_U\omega_2^0 + L_V\omega_2^0)\big).$$

Enfin de $[\Omega - G^{-1*}\Omega]_{q_1}^2 = [\Omega - G^{-1*}\Omega]_{q_1}^1 = 0$ on déduit que $L_V=0$, i.e. $V=X_k$ avec $k\in S^4(\mathbb{R}^6)$.

Supposons tout d'abord que

$$\begin{cases} \omega_2^1 = L_{U_0}\omega_2^0 \\ \omega_2^2 = \dfrac{1}{2}(L_{U_0}\omega_2^1 + L_{V_0}\omega_2^0), \end{cases}$$

avec $U_0 = X_{h_0}$, $h_0 \in S^3(\mathbb{R}^6)$ et $V_0 = X_{k_0}$, $k_0 \in S^4(\mathbb{R}^6)$. Puisque $U + U_0 \in \mathcal{G}_{\omega_1} = \{0\}$ on en déduit que $U_0 = -U$ et donc

$$\begin{aligned}
\sigma_2(\theta) &= -F^{-1*}\big(\omega_2^2 - \frac{1}{2}(L_U L_U \omega_2^0 + L_V \omega_2^0\big) \\
&= -F^{-1*} L_{\frac{V_0 - V}{2}} \omega_2^0 \\
&= L_{X_H} \omega_1
\end{aligned}$$

avec $H \in S^4(\mathbb{R}^6) : \overline{\sigma_2}([G]^2_{q_0}) = 0$.

Réciproquement supposons que $\overline{\sigma_2}([G]^2_q) = 0$. Soit $W = X_H$ avec $H \in S^4(\mathbb{R}^6)$ tel que $\sigma_2([G]^2_q) = -F^{-1*} L_W \omega_2^0$. On vérifie que

$$\omega_2^2 = L_{W + \frac{1}{2}V} \omega_2^0 - \frac{1}{2} L_U \omega_2^1.$$

La proposition est démontrée. $\square$

CHAPITRE 4

Structures de Monge-Ampère

Il est bien connu que si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est une fonction lisse alors le graphe

$$\left\{(q_1+iq_2,\frac{\partial f}{\partial q_1}-i\frac{\partial f}{\partial q_2})\right\}$$

est une sous-variété complexe de $\mathbb{C}^2$ si et seulement f est harmonique i.e.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial q_2^2}=0.$$

La structure complexe de $\mathbb{C}^2$ est donc encodée dans cette équation différentielle. Le formalisme des opérateurs de Monge-Ampère permet de donner un sens à cette notion intuitive : les surfaces réelles lisses calibrées par la structure de Monge-Ampère (Ω,ω) sur $\mathbb{R}^4$ avec

$$\Omega=dq_1\wedge dq_3+dq_2\wedge dq_4$$

et

$$\omega=dq_1\wedge dq_4-dq_2\wedge dq_3$$

sont des courbes complexes de $\mathbb{R}^4$ muni de la structure complexe

$$I=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$$

Remarquons que I, Ω et ω satisfont la relation

$$\omega(.,.)=-\Omega(I.,.).$$

Lychagin et Roubtsov ont généralisé cette correspondance entre structure de Monge-Ampère non dégénérée et structure presque complexe (ou presque produit) en dimension 4 ([**LR1**]). A une structure de Monge-Ampère (Ω,ω) non dégénérée (le pfaffien $\mathrm{pf}(\omega)=\frac{\omega\wedge\omega}{\Omega\wedge\Omega}$ est non nul) sur une variété lisse X de dimension 4 ils ont associé la section $A_\omega:X\to TX\otimes T^*X$ définie par

$$\frac{1}{\sqrt{|\,\mathrm{pf}(\omega)|}}\omega(.,.)=\Omega(A_\omega.,.).$$

Cette section est une structure presque complexe (i.e. $A_\omega^2=-Id$) si $\mathrm{pf}(\omega)>0$ ou une structure presque produit (i.e. $A_\omega^2=Id$) si $\mathrm{pf}(\omega)<0$. Ils ont donné une condition nécéssaire et suffisante pour que A_ω soit intégrable :

PROPOSITION. *A_ω est intégrable si et seulement si*

$$d\Big(\frac{\omega}{\sqrt{|\,\mathrm{pf}(\omega)|}}\Big)=0.$$

L'interprétation locale de ce résultat peut s'écrire comme suit

PROPOSITION. *Une équation de Monge-Ampère $\Delta_\omega = 0$ sur $\mathbb{R}^2$ est symplectiquement équivalente à l'une des deux équations*

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \\ \Box f = 0 \end{cases}$$

si et seulement si

$$d\Big(\frac{\omega}{\sqrt{|\operatorname{pf}(\omega)|}}\Big) = 0.$$

Nous menons dans ce chapitre une étude analogue en dimension 3. Notre point de départ est la remarque suivante : si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse alors le graphe de ∇f est une sous-variété lagrangienne spéciale de $\mathbb{C}^3$ si et seulement si f une solution de l'équation

$$\Delta f - \operatorname{hess}(f) = 0.$$

Alors, comme pour le cas de la dimension 2, l'équation lagrangienne spéciale doit donner des informations sur la structure de Calabi-Yau de $\mathbb{C}^3$. Dans la première partie de ce chapitre nous donnons un sens plus précis à cette notion en associant explicitement à chaque structure de Monge-Ampère non dégénérée (au sens de Hitchin) en dimension 3 une structure *presque Calabi-Yau généralisée*. Dans la deuxième partie nous démontrons un second critère d'équivalence locale des EMA non dégénérées en dimension 3 en termes d'intégrabilité et de courbure de cette structure géométrique associée. Ce chapitre est basé sur un article soumis pour publication ([**Ba2**]).

1. Structures de Calabi-Yau généralisées

Une structure géométrique (lisse) sur une variété X est une distribution (lisse) de familles de tenseurs sur chaque espace tangent T_xX. Cette structure est intégrable si au voisinage de chaque point on peut trouver un système de coordonnées dans lequel cette famille de tenseurs a une expression canonique. Une structure symplectique Ω par exemple est la donnée pour tout point x d'une forme symplectique Ω_x sur l'espace vectoriel T_xX telle que localement il existe un système de coordonnées $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ (dit système de coordonnées de Darboux) dans lequel

$$\Omega = dq_1 \wedge dp_1 + \cdots + dq_n \wedge dp_n.$$

Cette condition d'intégrabilité est équivalente à la condition de fermeture

$$d\Omega = 0.$$

Nous généralisons cette notion de structure symplectique en introduisant la notion de structure de Monge-Ampère :

DEFINITION 4.1. *Une structure de Monge-Ampère sur une variété réelle lisse de dimension* 6 *est la donnée d'un couple de formes différentielles*

$$(\Omega, \omega) \in \Omega^2(X) \times \Omega^3(X)$$

satisfaisant les conditions suivantes

(1) Ω *est une forme symplectique sur* X, *c'est à dire qu'elle est fermée et partout non dégénérée*

(2) ω *est une forme effective sur* (X, Ω) *i.e.* $\Omega \wedge \omega = 0$.

Cette structure de Monge-Ampère (Ω,ω) est dite non dégénérée si la 3-forme ω est partout non dégénérée au sens de Hitchin [1] *: $\lambda(\omega_x)$ est non nul pour tout $x \in X$.*

Si de plus

$$\begin{cases} d\big(\dfrac{\omega}{\sqrt[4]{|\lambda(\omega)|}}\big) = 0 \\ d\big(\dfrac{\hat{\omega}}{\sqrt[4]{|\lambda(\omega)|}}\big) = 0, \end{cases}$$

on dit que cette structure est fermée.

Nous montrons dans cette partie comment cette notion de structure de Monge-Ampère généralise la notion de structure presque Calabi-Yau. Nous commençons par rappeler le théorème de Newlander-Nirenberg sur l'intégrabilité d'une structure presque complexe (ou presque produit) et étudions l'exemple de la structure presque complexe sur la sphère S^6 associée à la restriction de la forme associative. Nous définissons ensuite ce qu'est une structure presque Calabi-Yau généralisée et montrons comment une telle structure peut être construite à partir d'une structure de Monge-Ampère non dégénérée en dimension 6. Nous montrons enfin que la condition d'intégrabilité de ces structures est équivalente à la condition de fermeture de la structure de Monge-Ampère associée.

1.1. Le théorème de Newlander-Nirenberg.

DEFINITION 4.2. *Une structure presque complexe sur une variété X est une section lisse I du fibré vectoriel $TX \otimes T^*X \to X$ telle que pour tout $x \in X$*

$$I_x^2 = -Id.$$

Cette structure presque complexe I permet de munir chaque espace tangent T_xX d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel en posant $i.U = I_xU$ pour tout vecteur tangent $U \in T_xX$.

EXEMPLE 4.3. *Soit X^n une variété holomorphe de dimension complexe n et soit $\left(U_j \overset{\phi_j}{\to} \mathbb{C}^n\right)_{j\in J}$ un atlas holomorphe de cette variété. On peut munir la variété réelle X d'une structure presque complexe I en posant pour $x \in U_j$ et $U \in T_xX$:*

$$I_x(U) = (T_x\phi_j)^{-1}\big(i.T_x\phi_j(U)\big).$$

(Cette définition est indépendante du choix de $j \in J$ puisque les changement de cartes $T_{\phi_j(x)}\phi_k \circ \phi_j^{-1}$ sont $\mathbb{C}$-linéaires).

Soit I une structure presque complexe sur une variété X. Notons V_+ et V_- les distributions sur $TX \otimes \mathbb{C}$ des sous-espaces propres de I :

$$\begin{cases} V_+(x) = \big\{Z \in T_xX \otimes \mathbb{C} : I_x(Z) = iZ\big\} \\ V_-(x) = \big\{Z \in T_xX \otimes \mathbb{C} : I_x(Z) = -iZ\big\}. \end{cases}$$

Notons que la conjugaison $Z \mapsto \overline{Z}$ sur $TX \otimes \mathbb{C}$ induit un isomorphisme réel $V_+ \to V_-$ et que l'application $T_xX \to T_xX \otimes \mathbb{C}$, $X \mapsto X - iI_x(X)$ induit un isomorphisme complexe $(T_xX, I_x) \to (V_+(x), i)$.

Notons $D(V_+)$ (respectivement $D(V_-)$) l'ensemble des sections lisses du fibré $TX \otimes \mathbb{C} \to X$ à valeurs dans V_+ (respectivement V_-).

[1] nous reprenons les notations du chapitre 2 sans y faire référence systématiquement

DEFINITION 4.4. *Une structure presque complexe I est dite intégrable au sens de Frobenius si $D(V_+)$ et $D(V_-)$ sont des sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs $D(X) \otimes \mathbb{C}$.*

On peut vérifier que I est intégrable au sens de Frobenius si et seulement si le tenseur de Nijenhuis $\mathcal{N}_I$ est nul, avec

$$\mathcal{N}_I(U,V) = [U,V] - [IU,IV] + I\big([IU,V] + [U,IV]\big).$$

DEFINITION 4.5. *Une structure presque complexe I sur une variété X est intégrable si il existe sur X un atlas holomorphe pour lequel I est la structure presque complexe associée. On dit alors que I est une structure complexe sur X.*

Le (difficile) théorème de Newlander-Nirenberg dit qu'une structure presque complexe I est intégrable si et seulement si elle est intégrable au sens de Frobenius :

THEOREME 4.6 (Newlander-Nirenberg)**.** *Une structure presque complexe I est intégrable si et seulement si $\mathcal{N}_I = 0$.*

EXEMPLE 4.7 (Structure presque complexe sur S^6)**.** *Soit X une variété lisse de dimension 6 munie d'une forme volume $\theta \in \Omega^6(X)$. Si $\omega \in \Omega^3(X)$ est une forme différentielle non dégénérée sur une variété de dimension 6, la section lisse*

$$\frac{K^\theta_\omega}{\sqrt[4]{|\lambda_\theta(\omega)|}} : X \to TX \otimes T^*X$$

définie par Hitchin est une structure presque complexe sur la variété X si $\lambda_\theta(\omega) < 0$. Nous étudions ici l'exemple de la célèbre forme associative restreinte à la sphère S^6.

Notons E_7 le sous-espace des imaginaires purs :

$$E_7 = \{x \in \mathbb{O} : \langle x, 1\rangle = 0\}.$$

Rappelons que la forme associative est une 3-forme extérieure sur E_7 définie par

$$\phi(x,y,z) = \langle x, yz\rangle.$$

La sphère S^6 s'identifie à la sous-variété de E_7

$$S^6 = \{x \in E_7 : \|x\| = 1\}.$$

Munissons S^6 de la forme volume θ définie par la métrique $\langle,\rangle$ et considérons la forme différentielle sur S^6,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi|_{S^6}.$$

Un calcul direct (informatisable) montre que $\lambda_\theta(\omega)$ est une fonction constante sur S^6 égale à -1. Le tenseur K^θ_ω est donc une structure presque complexe sur S^6.

Cette structure presque complexe est en fait bien connue. On vérifie aisément en utilisant la table de multiplication des octonions (table 1) que K^θ_ω vérifie

$$K^\theta_\omega(x)U = x.U$$

pour $x \in S^6$ et $U \in T_xS^6 = \{U \in E_7 : \langle x, U\rangle = 0\}$. Cette structure n'est pas intégrable (voir [**HS**]*). L'existence d'une structure complexe sur S^6 reste une question ouverte aujourd'hui.*

REMARQUE 4.8. *Une structure presque produit sur une variété X est une section $S : X \to TX \otimes T^*X$ telle que $S_x^2 = Id$ pour tout $x \in X$. De façon tout à fait analogue au cas des structures presque complexes, on dit qu'une structure presque produit est intégrable au sens de Frobenius si les distributions V_+ et V_- sont des distributions intégrables avec*

$$\begin{cases} V_+(x) = \{U \in T_xX : SU = U\} \\ V_-(x) = \{U \in T_xX : SU = -U\}. \end{cases}$$

Une version réelle du théorème de Newlander-Nirenberg dit qu'une structure presque produit est intégrable (c'est à dire que localement (X, S) est isomorphe à la variété produit $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, S_0)$ avec $S_0(X, Y) = (Y, X)$ si et seulement si elle est intégrable au sens de Frobenius.

1.2. Structures presque Calabi-Yau généralisées.

DEFINITION 4.9. *Une structure presque Calabi-Yau généralisée sur une variété réelle X de dimension $2n$ est la donnée d'un 5-uplet $(g, \Omega, K, \alpha, \beta)$ tel que*

(1) g *est une métrique éventuellement indéfinie sur* X

(2) Ω *est une forme symplectique sur* X

(3) $K : X \to TX \otimes T^*X$ *est une section lisse telle que* $K^2 = \pm 1$ *et telle que*

$$g(U, V) = \Omega(KU, V)$$

pour tous vecteurs tangents U *et* V

(4) α *et* β *sont des* n*-formes décomposables (éventuellement complexes) telles que*

$$\begin{cases} \alpha \wedge \Omega = \beta \wedge \Omega = 0 \\ \dfrac{\alpha \wedge \beta}{\Omega^n} \text{ est une fonction constante.} \end{cases}$$

et dont les distributions associées sont les distributions des sous-espaces propres de K *:*

$$\begin{cases} \{U : i_U\alpha = 0\} = \{U : KU = -\varepsilon U\} \\ \{U : i_U\beta = 0\} = \{U : KU = \varepsilon U\} \end{cases}$$

avec $\varepsilon = 1$ *ou* i.

EXEMPLE 4.10. *Rappelons qu'une structure de Calabi-Yau sur une variété de dimension réelle $2n$ est la donnée*

(1) d'une métrique g

(2) d'une forme symplectique Ω

(3) d'une structure complexe I *telle que* $g = \Omega(I., .)$

(4) d'une n*-forme complexe* α *holomorphe pour la structure complexe* I *et telle que*

$$\frac{\alpha \wedge \overline{\alpha}}{\Omega^n} \text{ est une fonction constante.}$$

Soit $(z_1, \dots, z_n)$ *un système de coordonnées complexes de* (X, I) *avec* $z_j = x_j + iy_j$. *Puisque* α *s'écrit dans ce système de coordonnées*

$$\alpha = f(z)dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n,$$

avec f *holomorphe, on a immédiatement que*

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}(\alpha) = \langle \dfrac{\partial}{\partial x_j} + i\dfrac{\partial}{\partial y_j} \rangle_{j=1,\dots,n} = V_- \\ \mathrm{Ker}(\overline{\alpha}) = \langle \dfrac{\partial}{\partial x_j} - i\dfrac{\partial}{\partial y_j} \rangle_{j=1,\dots,n} = V_+. \end{cases}$$

De plus $\Omega \wedge \alpha = \Omega \wedge \overline{\alpha} = 0$ *puisque* Ω *est de type* $(1,1)$ *et donc* $(g, \Omega, I, \alpha, \overline{\alpha})$ *est une structure presque Calabi-Yau généralisée.*

PROPOSITION 4.11. *Soit* (Ω, ω_0) *une structure de Monge-Ampère non dégénérée sur une variété réelle* X *de dimension* 6. *Posons*

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt[4]{\lambda(\omega_0)}}.$$

Soit q_ω *la métrique de Lychagin-Roubtsov et* K_ω *le tenseur de Hitchin définis par le couple* (Ω, ω). *Soit* $\omega = \alpha + \beta$ *la décomposition de* ω *en somme de deux formes décomposables.*

Alors $(q_\omega, \Omega, K_\omega, \alpha, \beta)$ *est une structure presque Calabi-Yau généralisée sur* X.

Démonstration. Puisque $q_\omega = \Omega(K_\omega., .)$ (proposition 2.20) il reste à vérifier que α et β sont effectives et que $\frac{\alpha \wedge \beta}{\Omega^3}$ est une fonction constante. Mais $K_\omega^* \Omega = \pm \Omega$. Donc puisque ω est effective et puisque $\hat{\omega} = K_\omega^* \omega$ on en déduit que $\hat{\omega}$ est effective et donc d'après la proposition 2.14, α et β sont effectives. De plus comme $|\lambda(\omega)| = 1$, on déduit que $\frac{\alpha \wedge \beta}{\Omega^3}$ est une fonction constante. □

EXEMPLE 4.12. *La structure géométrique sur* $T^*\mathbb{R}^3$ *associée à l'équation lagrangienne spéciale*

$$\mathrm{hess}(f) - \Delta f = 0$$

est la structure de Calabi-Yau classique (g, I, Ω, α) *avec*

$$\begin{cases} g = -\displaystyle\sum_{j=1}^{3} dx_j \cdot dx_j + dy_j \cdot dy_j \\ I = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_j} \otimes dx_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \otimes dy_j \\ \Omega = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} dx_j \wedge dy_j \\ \alpha = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3. \end{cases}$$

De manière similaire, la structure géométrique associée à l'équation pseudo lagrangienne spéciale

$$\mathrm{hess}(f) + \Box f = 0$$

est la structure pseudo Calabi-Yau (g, I, Ω, α) *avec*

$$\begin{cases} g = dx_1 \cdot dx_1 - dx_2 \cdot dx_2 + dx_3 \cdot dx_3 + dy_1 \cdot dy_1 - dy_2 \cdot dy_2 + dy_3 \cdot dy_3 \\ I = \dfrac{\partial}{\partial x_1} \otimes dy_1 - \dfrac{\partial}{\partial y_1} \otimes dx_1 + \dfrac{\partial}{\partial y_2} \otimes dx_2 - \dfrac{\partial}{\partial x_2} \otimes dy_2 - \dfrac{\partial}{\partial y_3} \otimes dx_3 + \dfrac{\partial}{\partial x_3} \otimes dy_3 \\ \Omega = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} dx_j \wedge dy_j \\ \alpha = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3. \end{cases}$$

La structure géométrique associée à l'équation de Monge-Ampère classique

$$\mathrm{hess}(f) = 1$$

est la structure Calabi-Yau "réelle" $(g, S, \Omega, \alpha, \beta)$ *avec*

$$\begin{cases} g = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} dx_j \cdot dy_j \\ S = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \otimes dx_j - \frac{\partial}{\partial y_j} \otimes dy_j \\ \Omega = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} dx_j \wedge dy_j \\ \alpha = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \ \beta = dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3. \end{cases}$$

1.3. Intégrabilité d'une structure presque Calabi-Yau généralisée.

DEFINITION 4.13. *Une structure presque Calabi-Yau généralisée*

$$(g, \Omega, K, \alpha, \beta)$$

est dite intégrable si α *et* β *sont fermées :*

$$d\alpha = d\beta = 0.$$

Les deux propositions suivantes explicitent cette définition.

PROPOSITION 4.14. *Une structure presque Calabi-Yau généralisée*

$$(g, \Omega, K, \alpha, \beta)$$

complexe (i.e. K *est une structure presque complexe) sur une variété* X *est intégrable si et seulement si* (g, Ω, K, α) *est une structure de Calabi-Yau (éventuellement indéfinie).*

DÉMONSTRATION. Supposons que $d\alpha = d\beta = 0$. Par définition

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}(\alpha) = V_- = \{Z : K(Z) = -iZ\} \\ \mathrm{Ker}(\beta) = V_+ = \{Z : K(Z) = iZ\}. \end{cases}$$

Soit $\Omega^1_+ = \{\xi \in \Omega^1(X) : \xi|_{V_+} = 0\}$. Puisque β est décomposable, elle s'écrit $\beta = \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_n$. Toute forme $\xi \in \Omega^1_+$ est combinaison des β_i et vérifie donc $\xi \wedge \beta = 0$. Ainsi

$$0 = d(\xi \wedge \beta) = d\xi \wedge \beta - \xi \wedge d\beta.$$

Ainsi, si β est fermée alors $d\xi \wedge \beta = 0$. Autrement dit $d\xi = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \wedge \gamma_j$ pour tout $\xi \in \Omega^1_+$. Soit Z et Z' dans $D(V_+)$ et $\xi \in \Omega^1(V_+)$:

$$0 = d\xi(Z, Z') = Z\xi(Z') - Z'\xi(Z) - \xi([Z, Z']).$$

Et donc $\xi([Z, Z']) = 0$ pour tout $\xi \in \Omega^1_+$: $[Z, Z'] \in D(V_+)$. On en déduit d'après le théorème de Newlander-Nirenberg que la structure presque complexe K est intégrable. De plus il existe un système de coordonnées complexes $(z_1, \dots, z_n)$ dans lequel

$$\begin{cases} \alpha = f(z, \overline{z}) dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \\ \beta = g(z, \overline{z}) d\overline{z_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z_n}. \end{cases}$$

Mais $\overline{\partial} f = 0$ puisque α est fermée et donc α est holomorphe. De même β est antiholomorphe. En particulier

$$\overline{\alpha} = h(\overline{z})\beta$$

avec h holomorphe et donc $H = \frac{\alpha \wedge \overline{\alpha}}{\Omega^n}$ est antiholomorphe.

Remarquons maintenant que (g, Ω, K) est une structure de Kähler sur X. Il existe donc un potentiel de Kähler F tel que $\Omega = i\partial\overline{\partial}F$. En particulier $\overline{\Omega} = \Omega$ et donc nécessairement $\overline{H} = -H$. La fonction H est donc constante et finalement (g, Ω, K, α) est une structure de Calabi-Yau (avec une métrique de Kähler éventuellement indéfinie) sur X.

La réciproque étant triviale, la proposition est démontrée. $\square$

PROPOSITION 4.15. *Une structure presque Calabi-Yau généralisée*

$$(g, \Omega, K, \alpha, \beta)$$

réelle (i.e. K est une structure presque produit) sur une variété X est intégrable si et seulement si au voisinage de chaque point il existe un système de coordonnées (x, y) et une fonction $F(x, y)$ tels que

$$\begin{cases} \alpha = f(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ \beta = g(y) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \\ K = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \otimes dx_j - \frac{\partial}{\partial y_j} \otimes dy_j \\ \Omega = \displaystyle\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial y_k} dx_j \wedge dy_k \\ g = \displaystyle\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial y_k} dx_j \cdot dy_k. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Supposons que $d\alpha = d\beta = 0$. Par le même raisonnement que précédemment on vérifie que la condition $d\alpha = d\beta = 0$ implique l'intégrabilité au sens de Frobenius des distributions

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}(\alpha) = V_- = \{X : K(X) = -X\} \\ \mathrm{Ker}(\beta) = V_+ = \{X : K(X) = X\}. \end{cases}$$

D'après la version réelle du théorème de Newlander-Nirenberg on en déduit qu'il existe un système de coordonnées (x, y) de X dans lequel

$$\begin{cases} \alpha = f(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ \beta = g(y)dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} K\dfrac{\partial}{\partial x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_j} \\ K\dfrac{\partial}{\partial y_j} = -\dfrac{\partial}{\partial y_j}. \end{cases}$$

De plus, comme $\alpha \wedge \Omega = \beta \wedge \Omega = 0$, V_- et V_+ sont des distributions lagrangiennes. Par exemple, si $X, Y \in V_+$ alors

$$0 = i_{X\wedge Y}(\Omega \wedge \beta) = \Omega(X, Y)\beta.$$

Donc nécessairement

$$\Omega = \sum_{j,k} a_{jk} dx_j \wedge dy_k.$$

De la condition $d\Omega = 0$ on déduit que les coefficients a_{jk} vérifient les relations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} = \dfrac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial a_{ij}}{\partial y_k} = \dfrac{\partial a_{ik}}{\partial y_j}. \end{cases}$$

Posons alors

$$f_j(x, y) = \int_0^{x_1} a_{1j}(t, x_2, \ldots, x_n, y)dt + \int_0^{x_2} a_{2j}(0, t, x_3, \ldots, x_n, y)dt + \cdots + \int_0^{x_n} a_{nj}(0, \ldots, 0, t, y)dt.$$

Pour tout couple (i, j) on a $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = a_{ij}$ et $\frac{\partial f_i}{\partial y_j} = \frac{\partial f_j}{\partial y_i}$. Il existe donc F tel que $f_i = \frac{\partial F}{\partial y_i}$: F est le potentiel recherché. □

REMARQUE 4.16. *Une variété de Monge-Ampère au sens de Kontsevich et Soibelman ([**KS**]) est une variété riemannienne affine (M, g) telle que localement la métrique g s'écrit*

$$g = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k} dx_j \cdot dx_k,$$

F étant une fonction lisse dont le hessien est une fonction constante. Les variétés munies d'une structure de Calabi-Yau réelle sont très similaires. La métrique vérifie en effet

$$g = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial y_k} dx_j \cdot dy_k$$

avec

$$\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial y_k}\right) = f(x)g(y).$$

Revenons maintenant à notre structure presque Calabi-Yau généralisée

$$(q_\omega, \Omega, K_\omega, \alpha, \beta)$$

associée à une structure de Monge-Ampère non dégénérée (Ω, ω_0). D'après 2.14, α et β sont fermées si et seulement si ω et $\hat{\omega}$ le sont. D'où la proposition

PROPOSITION 4.17. *Une structure presque Calabi-Yau généralisée associée à une structure de Monge-Ampère non dégénérée sur une variété de dimension* 6 *est intégrable si et seulement si celle-ci est fermée.*

2. Structures de Monge-Ampère localement constantes

Nous revenons maintenant à notre problème d'équivalence locale des équations de Monge-Ampère sur $\mathbb{R}^3$: quelles conditions sont nécessaire pour qu'une équation de Monge-Ampère non dégénérée $\Delta_\omega = 0$ puisse être ramenée par un changement de variable symplectique à l'une des trois équations canoniques

$$\begin{cases} \mathrm{hess}(f) = 1 \\ \Delta f - \mathrm{hess}(f) = 0 \\ \Box f + \mathrm{hess}(f) = 0 \text{ ?} \end{cases}$$

Autrement dit, quelles conditions faut il sur ω pour qu'il existe localement un système de coordonnées de Darboux de $T^*\mathbb{R}^3$ dans lequel ω est une forme à coefficients constants ?

Posons la définition

DEFINITION 4.18. *Une structure de Monge-Ampère* (Ω, ω) *sur une variété* X *est dite localement constante si il existe localement un système de coordonnées de Darboux de* (X, Ω) *dans lequel* ω *est une forme à coefficients constants.*

Puisque q_ω et K_ω sont des invariants de l'action du groupe symplectique $Sp(3)$, si (Ω, ω) est localement constante il est clair que la structure presque Calabi-Yau généralisée associée est intégrable et que la métrique est plate. Nous montrons ici que ces conditions sont en fait suffisantes.

Nous commençons par rappeler ce qu'est la courbure d'une métrique. Nous démontrons ensuite ce résultat et nous étudions enfin à titre d'exemple la structure Calabi-Yau (non plate) de Stenzel sur T^*S^3.

2.1. Courbure d'une métrique. Soit X une variété lisse et $D(X)$ l'ensemble des champs de vecteurs lisses sur X.

DEFINITION 4.19. *Une connexion (affine) sur* X *est une application*

$$\nabla : D(X) \times D(X) \to D(X)$$

vérifiant :

(1) $\nabla_{fU+gV} W = f\nabla_U W + g\nabla_V W$

(2) $\nabla_U(V + W) = \nabla_U V + \nabla_U W$

(3) $\nabla_U(fV) = f\nabla_U V + U(f)V$

pour tous $U, V, W \in D(X)$ *et tout* $f, g \in C^\infty(X)$.

REMARQUE 4.20. *Soit* $(x_1, \dots, x_n)$ *un système de coordonnées sur* X. *Les symboles de Christoffel d'une connexion* ∇ *sur* X *dans ce système de coordonnées sont les coefficients* $\left(\Gamma_{ij}^k\right)$ *définis par*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

DEFINITION 4.21. *La courbure* R *d'une connexion* ∇ *est la* 2*-forme sur* X *à valeur dans* $TX \otimes T^*X$ *définie par*

$$R(U,V)W = \nabla_{[U,V]}W - [\nabla_U, \nabla_V]W$$

En coordonnées cette courbure s'écrit

$$R(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{l,m=1}^{n} (\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^m - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^m)\frac{\partial}{\partial x_m} + \sum_{l=1}^{n} (\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i})\frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Autrement dit, si on note R^{ij} la matrice $R(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$ et Γ_i la matrice $\left(\Gamma_{ij}^k\right)_{j,k}$, on a

$$R^{ij} = \left([\Gamma_i, \Gamma_j] + \frac{\partial \Gamma_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_j}{\partial x_i}\right)^t.$$

THEOREME 4.22 (Levi-Civita)**.** *Soit* X *une variété lisse munie d'une métrique* g *éventuellement indéfinie. Il existe une unique connexion affine* ∇ *sur* X *compatible avec* g *et symétrique i.e.*

$$\begin{cases} U.g(V,W) = g(\nabla_U V, W) + g(V, \nabla_U W) \\ \nabla_U V - \nabla_V U = [U,V] \end{cases}$$

pour tous champs de vecteurs U, V, W *sur* X. *Cette connexion s'appelle la connexion de Levi-Civita associée à* g.

REMARQUE 4.23. *Notons* G *la matrice de la métrique* g *dans le système de coordonnées* $(x_1, \dots, x_n)$ *:*

$$G_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}).$$

Alors

$$\left(\Gamma_i.G\right)_{jk} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}).$$

DEFINITION 4.24. *Une (pseudo) métrique est dite plate si la courbure* R *de la connexion de Levi-Civita associée est identiquement nulle sur* X.

2.2. Un second critère d'équivalence locale. Nous aurons besoin d'un petit lemme que nous démontrons dans l'annexe D :

LEMME 4.25. *Soit* C_1, C_2, C_3 *des matrices carrées à coefficients lisses au voisinage de* 0 *sur* $\mathbb{R}^3$ *telles que*

$$\frac{\partial C_i}{\partial x_j} - \frac{\partial C_j}{\partial x_i} + [C_i, C_j] = 0$$

Alors il existe toujours $G = G(x_1, x_2, x_3)$ solution du système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial x_1} G^{-1} = C_1 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x_2} G^{-1} = C_2 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x_3} G^{-1} = C_3. \end{cases}$$

THEOREME 4.26. *Soit (Ω, ω_0) une structure de Monge-Ampère locale non dégénérée sur une variété réelle N^6 de dimension 6. Soit la forme normalisée associée à ω_0*

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt[4]{|\lambda(\omega_0)|}}.$$

(Ω, ω) est localement constante si et seulement si

$$\begin{cases} d\omega = d\hat{\omega} = 0 \\ R(q_\omega) = 0, \end{cases}$$

où $R(q_\omega)$ est le tenseur de courbure de la (pseudo) métrique q_ω associé à ω.

Démonstration. *Cas hyperbolique : $\lambda(\omega) = 1$*

Si $\omega = du_1 \wedge du_2 \wedge du_3 + dv_1 \wedge dv_2 \wedge dv_3$ dans un système de coordonnées symplectique (u, v) alors $\hat{\omega} = du_1 \wedge du_2 \wedge du_3 - dv_1 \wedge dv_2 \wedge dv_3$. Donc $d\omega = d\hat{\omega} = 0$. De plus

$$\begin{cases} K_\omega(\dfrac{\partial}{\partial u_j}) = \dfrac{\partial}{\partial u_j} & j = 1, 2, 3 \\ K_\omega(\dfrac{\partial}{\partial v_j}) = -\dfrac{\partial}{\partial v_j} & j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

et donc $q_\omega = \sum_{j=1}^{3} du_j \cdot dv_j$: q_ω est plate.

Réciproquement supposons que $d\omega = d\hat{\omega} = 0$ et $R(q_\omega) = 0$. Nous savons qu'il existe un système de coordonnées (x, y) dans lequel

$$\begin{cases} \alpha = f(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ \beta = g(y) dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 \\ K_\omega = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_i - \frac{\partial}{\partial y_i} \otimes dy_i \\ \Omega = \displaystyle\sum_{i,j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial y_j} dx_i \wedge dy_j \\ q_\omega = \displaystyle\sum_{i,j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial y_j} dx_i \cdot dy_j. \end{cases}$$

Utilisons maintenant le fait que q_ω est plate. Soit Γ_{ij}^k les symboles de Christoffels de la connexion de Levi-Civita $\nabla = \nabla_\omega$ dans les coordonnées (x, y). On vérifie facilement que pour $j = 1, 2, 3$

$$\begin{cases} \Gamma_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x_j} A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Gamma_{j+3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (A^{-1} \frac{\partial A}{\partial y_j})^t \end{pmatrix}, \end{cases}$$

avec $A_{jk} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial y_k}$.

Posons $C_j = \frac{\partial A}{\partial x_j} A^{-1}$ et $D_j = A^{-1} \frac{\partial A}{\partial y_j}$ pour $j = 1, 2, 3$. De $R = 0$ il vient pour $j, k = 1, 2, 3$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C_j}{\partial y_k} = 0 \\ \dfrac{\partial C_j}{\partial x_k} - \dfrac{\partial C_k}{\partial x_j} + [C_j, C_k] = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D_j}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{\partial D_i}{\partial y_j} - \dfrac{\partial D_j}{\partial y_i} + [D_i, D_j]. \end{cases}$$

Soit $G = G(x)$ une solution du système différentiel

$$\frac{\partial G}{\partial x_j} G^{-1} = C_j, \ j = 1, 2, 3$$

(une telle solution existe toujours, voir lemme 4.25). On a alors pour $j = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A^{-1} G}{\partial x_j} &= \frac{\partial A^{-1}}{\partial x_j} G + A^{-1} \frac{\partial G}{\partial x_j} \\ &= -A^{-1} \frac{\partial A}{\partial x_j} A^{-1} G + A^{-1} \frac{\partial G}{\partial x_j} \\ &= -A^{-1} C_j G + A^{-1} C_j G \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc

$$A(x, y) = G(x) F(y)$$

Notons $G_j(x) = (G_{j1}(x), G_{j2}(x), G_{j3}(x))$ et $F_j(y) = (F_{1j}(y), F_{2j}(y), F_{3j}(y))$ pour $j = 1, 2, 3$. De $\frac{\partial^3 \phi}{\partial x_j \partial x_k \partial y_l} = \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_k \partial x_j \partial y_l}$ il vient

$$\langle \frac{\partial G_j}{\partial x_k} - \frac{\partial G_k}{\partial x_j}, F_l \rangle = 0$$

et donc $\frac{\partial G_j}{\partial x_k} = \frac{\partial G_k}{\partial x_j}$: il existe des fonctions $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$ telles que

$$G_j = (\frac{\partial u_j}{\partial x_1}, \frac{\partial u_j}{\partial x_2}, \frac{\partial u_j}{\partial x_3})$$

et de la même façon il existe des fonctions $v_1(y), v_2(y), v_3(y)$ telles que

$$F_j = (\frac{\partial v_j}{\partial y_1}, \frac{\partial v_j}{\partial y_2}, \frac{\partial v_j}{\partial y_3})$$

Dans le système de coordonnées (u,v) on a alors

$$\begin{cases} \Omega = du_1\wedge dv_1 + du_2\wedge dv_2 + du_3\wedge dv_3 \\ \omega = r(u) du_1\wedge du_2\wedge du_3 + s(v) dv_1\wedge dv_2\wedge dv_3. \end{cases}$$

Mais $\omega\wedge\hat{\omega} = -\frac{1}{6}\Omega^3$ donc r et s sont constantes et inverses l'une de l'autre. Quitte à remplacer u_1 par ru_1 et v_1 par $\frac{1}{r}v_1$ on obtient le résultat souhaité.

Cas elliptique défini négatif : $\lambda = 1,\ s(q_\omega) = (0,6)$

La démonstration est analogue à la précédente en remplaçant les coordonnées réelles (x,y) par les coordonnées complexes $(z,\overline{z})$:

Si

$$\begin{cases} \omega = \mathrm{Re}(idz_1\wedge dz_2\wedge dz_3) \\ \Omega = \dfrac{i}{2}(dz_1\wedge\overline{dz_1} + dz_2\wedge\overline{dz_2} + dz_3\wedge\overline{dz_3}) \end{cases}$$

alors $d\omega = d\hat{\omega} = 0$ et $q_\omega = \sum_{j=1}^{3} dz_j\cdot d\overline{z_j}$ est plate.

Réciproquement supposons que $d\omega = d\hat{\omega} = 0$ et $R(q_\omega) = 0$. Il existe un système de coordonnées complexes (z_1,z_2,z_3) de (X, K_ω) dans lequel

$$\begin{cases} \alpha = dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3 \\ \Omega = i\displaystyle\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial^2\phi}{\partial z_j\partial\overline{z_k}} dz_j\wedge d\overline{z_k}. \end{cases}$$

De $R(q_\omega) = 0$ on déduit que la matrice $A = (\frac{\partial^2\phi}{\partial z_j\partial\overline{z_k}})$ s'écrit nécessairement

$$A(z,\overline{z}) = G(z)F(\overline{z})$$

Mais $\overline{A}^t = A$ donc $\overline{F}^t = GF(\overline{G}^t)^{-1}$. Or $\overline{F}$ et G sont holomorphes et $F(\overline{G}^t)^{-1}$ est antiholomorphe donc constante :

$$A(z,\overline{z}) = H(z)\overline{H}^t(\overline{z})$$

et donc nécessairement il existe des fonctions holomorphes $u_1(z), u_2(z), u_3(z)$ telles que

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z_j\partial\overline{z_k}} = \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial u_l}{\partial z_j}\cdot\frac{\partial\overline{u_l}}{\partial\overline{z_k}}$$

On a alors le résultat voulu dans le système de coordonnées complexes (u_1,u_2,u_3) .

Cas elliptique indéfini : $\lambda(\omega) = 1,\ s(q_\omega) = (4,2)$

On remarque que la structure de Monge-Ampère pseudo-Kähler se déduit de la structure de Monge-Ampère Kähler par le changement de variable $\xi : z_2\mapsto\overline{z_2}$. (Ω,ω) est alors localement constante si et seulement si $(\xi^*\Omega,\xi^*\omega)$ est localement constante. □

Ce critère d'intégrabilité (qui porte aussi sur les dérivées secondes de ω) permet d'interpréter géométriquement le critère d'intégrabilité démontré dans le chapitre 3.

La démonstration et l'énoncé de celui-ci sont beaucoup plus simples mais ils sont équivalents.

Pour conclure, nous résumons dans le tableau 1 la correspondance entre structures (pseudo) Calabi-Yau et structures de Monge-Ampère elliptiques (i.e. $\lambda(\omega) < 0$).

presque (pseudo) CY	MA elliptique
(pseudo) CY	MA elliptique fermé
(pseudo) CY plat	MA elliptique localement constant

TAB. 1. Correspondance entre structures de Calabi-Yau et structures de Monge-Ampère elliptiques

2.3. La métrique de Stenzel. Ce résultat doit permettre en théorie d'exhiber d'autres exemples d'équations de Monge-Ampère de type lagrangien spécial en dimension 3. Par exemple si $(X, g, I, \Omega, \alpha)$ est une variété de Calabi-Yau de dimension complexe 3 et si la métrique g n'est pas plate alors l'équation lagrangienne spéciale $\Delta_{\mathrm{Im}(\alpha)} = 0$ n'est pas localement équivalente à l'équation

$$\Delta f - \mathrm{hess}(f) = 0.$$

Il y a malheureusement très peu d'exemples explicites connus de métriques de Calabi-Yau (sauf en dimension complexe 1). La métrique de Stenzel (Ricci plate mais non plate) sur le cotangent T^*S^n de la sphère S^n est l'un de ces rares exemples. Cependant T^*S^n est non compacte : il n'existe aucun exemple explicite sur une variété de Calabi-Yau compacte. Nous donnons ici une description (formelle) de l'équation lagrangienne spéciale sur T^*S^3.

$T^*S^n = \Big\{(u, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} : \|u\| = 1, \langle u, v\rangle = 0\Big\}$ s'identifie à la variété complexe $Q^n = \Big\{z \in C^{n+1} : z_1^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 1\Big\}$ via l'isomorphisme

$$\xi(x + iy) = (\frac{x}{\sqrt{1 + \|y\|^2}}, y).$$

La forme volume holomorphe est alors

$$\alpha_z(Z_1, \ldots, Z_n) = \det(z, Z_1, \ldots, Z_n).$$

et la forme de Kähler est $\Omega = i\partial\bar{\partial}\phi$ avec $\phi = \xi(\tau)$, τ étant la restriction à Q^n de $|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$ et ξ étant une solution de l'équation différentielle ordinaire

$$x(\xi')^n + \xi''(\xi')^{n-1}(x^2 - 1) = c > 0.$$

Pour écrire l'équation lagrangienne spéciale nous devons trouver un système de coordonnées de Darboux. Utilisant les relations

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{4} u_k du_k + v_k dv_k = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{4} u_k dv_k + v_k du_k = 0 \end{cases}$$

sur T^*S^3, nous constatons que sur l'ouvert de carte $u_4 \neq 0$,

$$\Omega = \sum_{k=1}^{3} dw_k \wedge du_k$$

avec

$$w_k = 2\frac{f'(2+2\|v\|^2)\sqrt{1+\|v\|^2}}{u_4}(u_k v_4 - v_k u_4).$$

Soit ψ l'application $(u, w) \mapsto (x + iy)$. L'équation lagrangienne spéciale s'écrit

$$(\psi \circ df)^*(Im(\alpha)) = 0.$$

Il est difficile d'expliciter cette formule : il semble que l'équation lagrangienne spéciale de Stenzel n'a pas d'expression simple.

CHAPITRE 5

Grassmannienne associée à une équation de Monge-Ampère

La grassmannienne associée à une équation différentielle en un point x est une approximation à l'ordre 1 des solutions généralisées passant par ce point x : c'est l'ensemble des espaces tangents en x de toutes les solutions passant par ce point. Ainsi, la grassmannienne $IE_\omega(x)$ (nous reprenons les notations de Lychagin ([**L2**])) associée à une équation de Monge-Ampère symplectique $\Delta_\omega = 0$ sur $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des sous-espaces lagrangiens L de $(T_xT^*\mathbb{R}^n, \Omega_x)$ vérifiant

$$\omega_x|_L = 0.$$

Considérons par exemple l'équation de Monge-Ampère elliptique sur $\mathbb{R}^2$

$$\Delta f = 0.$$

La grassmannienne IE_ω associée est l'ensemble des plans L de $T^*\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} (dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2)|_L = 0 \\ (dq_1 \wedge dp_2 - dq_2 \wedge dp_1)|_L = 0. \end{cases}$$

Ainsi, $L \in IE_\omega$ si et seulement si $(dz_1 \wedge dz_2)|_L = 0$ avec $z_1 = q_1 + iq_2$ et $z_2 = p_1 - ip_2$ ou encore si et seulement si il existe $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que L est le noyau de la forme linéaire $a_1dz_1 + a_2dz_2$: IE_ω est homéomorphe à $P(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C}P^1$. On vérifie de la même façon que la grassmannienne associée à l'équation hyperbolique

$$\Box f = 0$$

est homéomorphe au tore $S^1 \times S^1$.

La topologie de ces grassmanniennes est en général beaucoup plus compliquée en dimension supérieure. Nous présentons dans ce chapitre deux façons différentes de l'aborder :

(1) $IE_\omega(x)$ est un sous-espace topologique de la grassmannienne des plans lagrangiens (orientés) de $T^*\mathbb{R}^n$ qui s'identifie naturellement à l'espace homogène $U(n)/SO(n)$. Il est bien connu par exemple que la grassmannienne des plans lagrangiens spéciaux de $T^*\mathbb{R}^n$ s'identifie à l'espace homogène

$$SU(n)/SO(n)$$

qui une variété lisse et connexe. Nous montrons dans la première partie que les grassmanniennes associées aux deux autres équations de Monge-Ampère $\mathrm{hess}(f) = 1$ et $\Box f + \mathrm{hess}(f) = 0$ sont des "orbifolds" plus complexes.

(2) $IE_\omega(x)$ peut être vue comme une sous-variété algébrique de l'espace projectif $P(\Lambda^n(\mathbb{R}^{2n}))$ en utilisant le plongement de Plücker. Nous montrons dans la deuxième partie que la grassmannienne associée à une équation de

Monge-Ampère pluriharmonique est une sous-variété algébrique réelle de $\mathbb{C}P^4$.

La cohomologie de la grassmannienne associée à une équation de Monge-Ampère définit certains invariants topologiques des singularités de ses solutions. Par exemple la première classe est une obstruction à la construction de solutions discontinues à partir d'une solution généralisée (voir [**Z1**], [**Z2**], [**Z3**]). Nous complétons dans la troisième partie le calcul des classes caractéristiques de Zilbergleit pour les trois équations de Monge-Ampères non dégénérées et à coefficients constants sur $\mathbb{R}^6$.

1. Grassmannienne des sous-espaces calibrés de $\mathbb{R}^6$

Soit $(\Omega, \omega) \in \Lambda^2(\mathbb{R}^6) \times \Lambda^3(\mathbb{R}^6)$ une structure de Monge-Ampère non dégénérée sur $\mathbb{R}^6$ et soit $(q_\omega, K_\omega, \alpha, \beta)$ la structure de Calabi-Yau généralisée associée. Rappelons que la signature $\varepsilon(q_\omega)$ de q_ω est $(3,3)$ si $\lambda(\omega) = 1$ et $(0,6)$ ou $(4,2)$ si $\lambda(\omega) = -1$.

Soit IE_ω l'ensemble de tous les sous-espaces lagrangiens (orientés) de $(\mathbb{R}^6, \Omega)$ sur lesquels s'annule ω. Puisque q_ω est en général indéfinie, la signature de $q_\omega|_L$ peut changer en fonction de $L \in IE_\omega$. Introduisons alors les notations suivantes

DEFINITION 5.1. *(1)* $IE_\omega^\dagger = \left\{ L \in IE_\omega : q_\omega|_L \textit{ est non dégénérée} \right\}$

(2) $IE_\omega^{(p,q)} = \left\{ L \in IE_\omega : \varepsilon(q_\omega|_L) = (p,q) \right\}$

LEMME 5.2. *$IE_\omega^\dagger$ est un ouvert de IE_ω et si $p + q = 3$ alors $IE_\omega^{(p,q)}$ est une réunion de composantes connexes de $IE_\omega^\dagger$.*

Démonstration. Notons $G(3,3)$ la grassmannienne de tous les sous-espaces de dimension 3 de $\mathbb{R}^6$ et $G^\dagger(3,3)$ la grassmannienne de tous les sous-espaces de dimension 3 sur lesquels q_ω est non dégénérée. Soit $L \in G^\dagger(3,3)$ et L^0 un supplémentaire :

$$L \oplus L^0 = \mathbb{R}^6.$$

Notons $\mathcal{U}_L = \left\{ K \in G(3,3) : K \oplus L^0 = \mathbb{R}^6 \right\}$ et $\phi_L : \mathcal{L}(L, L^0) \to \mathcal{U}_{\mathcal{L}}$ l'application qui, à une application linéaire ϕ, associe son graphe K_ϕ dans $L \oplus L^0$. La famille $\left\{ \mathcal{L}(L, L_0) \stackrel{\Phi_L}{\to} \mathcal{U}_L \right\}_{L \in G(3,3)}$ constitue un atlas de la variété $G(3,3)$. Fixons une base $\mathcal{B}$ de L et $\mathcal{B}_0$ une base de L_0 et notons A la matrice de $q_\omega|_L$ dans $\mathcal{B}$ et $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ la matrice de q_ω dans $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_0$. Soit maintenant $K_\phi \in \mathcal{U}_{\mathcal{L}}$, K_ϕ étant le graphe de l'aaplication linéaire $\phi : L \to L_0$. La projection $\pi : \mathcal{L} \oplus L_0 \to L$ permet d'identifier la forme quadratique $q_\omega|_{K_\phi}$ avec la forme quadratique sur L

$$q_\phi = A + B\phi + \phi^t C + \phi^t D \phi.$$

Il vient alors

$$\det(q_\phi) = \det(A) + o(\|\phi\|).$$

Ainsi si la norme de ϕ est suffisamment petite alors q_ω est non dégénérée sur K_ϕ : $G^\dagger(3,3)$ est un ouvert de $G(3,3)$. De plus les valeurs propres de q_ϕ restent de signe constant lorsque ϕ reste petit : la signature de q_ω reste constante sur chaque composante connexe de $G^\dagger(3,3)$. On en déduit alors le résultat pour le sous-espace topologique IE_ω de $G(3,3)$. $\square$

REMARQUE 5.3. *Posons* $IE_\omega^k = \bigcup_{p+q\leq k} IE_\omega^{(p,q)}$ *pour* $k = 0, 1, 2, 3$.

$$\emptyset = IE_\omega^{-1} \subset IE_\omega^0 \subset IE_\omega^1 \subset IE_\omega^2 \subset IE_\omega^3 = IE_\omega$$

est une filtration de IE_ω.

PROPOSITION 5.4. *(1) si* $\lambda(\omega) = 1$ *alors*

$$IE_\omega^\dagger = \big(SL(3)/SO(3)\big) \sqcup \big(SL(3)/SO(1,2)\big)$$

(2) si $\lambda(\omega) = -1$ *et* $\varepsilon(q_\omega) = (0,6)$ *alors*

$$IE_\omega = IE_\omega^\dagger = SU(3)/SO(3)$$

(3) si $\lambda(\omega) = -1$ *et* $\varepsilon(q_\omega) = (4,2)$ *alors*

$$IE_\omega^\dagger = SU(2,1)/SO(2,1)$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que si $L \in IE_\omega^\dagger$ alors $K_\omega \cdot L$ est l'orthogonal L^0 pour q_ω de L. En effet $q_\omega = \Omega(K_\omega.,.)$ et L est lagrangien donc $K_\omega{\cdot}L \subset L^0$. Si $q_\omega|_L$ est non dégénérée alors L^0 est de dimension 3 et donc $K_\omega{\cdot}L = L^0$. En particulier

$$L \oplus K_\omega \cdot L = \mathbb{R}^6.$$

Cas $\lambda(\omega) = 1$

Fixons une base $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$ de $\mathbb{R}^6$ dans laquelle

$$\begin{cases} \Omega = \displaystyle\sum_{i=1}^3 e_i^* \wedge f_i^* \\ q_\omega = \displaystyle\sum_{i=1}^3 e_i^* \cdot f_i^* \\ K_\omega = \displaystyle\sum_{i=1}^3 e_i \otimes e_i^* - f_i \otimes f_i^* \\ \omega = e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* - f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^* \\ \hat{\omega} = e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*. \end{cases}$$

Notons

$$\begin{cases} L_{(3,0)} = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^3\} \in IE_\omega^{(3,0)} \\ L_{(1,2)} = \{(x_1, x_2, x_3, x_1, -x_2, -x_3)\} \in IE_\omega^{(1,2)}. \end{cases}$$

Soit $L \in IE_\omega^{(p,q)}$ avec $p + q = 3$. Soit $\{a_1, a_2, a_3\}$ une base orthonormée directe de (L, q_ω) :

$$\begin{cases} q_\omega(a_i, a_j) = \varepsilon_i \delta_{ij} & \varepsilon_i = \pm 1 \\ e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*(a_1 \wedge a_2 \wedge a_3) \geq 0. \end{cases}$$

Posons $u_i = \frac{a_i + K_\omega(a_i)}{\sqrt{2}}$ et $v_i = \frac{a_i - K_\omega(a_i)}{\sqrt{2}}$ pour $i = 1, 2, 3$. Soit A la matrice des u_i dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, B la matrice des v_i dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$ et $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. On a clairement $L = C \cdot L_0$. De plus A et B vérifient

$$\begin{pmatrix} A^t & 0 \\ 0 & B^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ Id & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_{(p,q)} \\ I_{(p,q)} & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$I_{(p,q)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit $A^t B = I_{(p,q)}$. En particulier $\det(B) = \frac{1}{\det(A)}$ si $(p,q) = (3,0)$ ou $(1,2)$ et $\det(B) = -\frac{1}{\det(A)}$ si $(p,q) = (0,3)$ ou $(2,1)$. Utilisant maintenant le fait que $\omega(a_1 \wedge a_2 \wedge a_3) = 0$ on obtient $\det(A) = \det(B)$. Finalement

$$\begin{cases} IE_\omega^{(3,0)} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^t)^{-1} \end{pmatrix} \cdot L_{(3,0)} : A \in SL(3) \right\} \\ IE_\omega^{(1,2)} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^t)^{-1} \end{pmatrix} \cdot L_{(1,2)} : A \in SL(3) \right\} \\ IE_\omega^{(0,3)} = \emptyset \\ IE_\omega^{(2,1)} = \emptyset. \end{cases}$$

Enfin $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^t)^{-1} I_{(p,q)} \end{pmatrix} \cdot L_{(p,q)} = L_{(p,q)}$ si et seulement si pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$

$$(A^t)^{-1} I_{(p,q)} X = I_{(p,q)} A X$$

i.e. si et seulement si $A \in SO(p,q)$. Et donc

$$\begin{cases} IE_\omega^{(3,0)} = SL(3)/SO(3) \\ IE_\omega^{(1,2)} = SL(3)/SO(1,2). \end{cases}$$

Cas $\lambda(\omega) = -1$ *et* $\varepsilon(q_\omega) = (4,2)$

Choisissons une base $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$ de $\mathbb{R}^6$ dans laquelle

$$\begin{cases} \Omega = \sum_{i=1}^{3} e_i^* \wedge f_i^* \\ q_\omega = e_1^* \cdot e_1^* - e_2^* \cdot e_2^* + e_3^* \cdot e_3^* + f_1^* \cdot f_1^* - f_2^* \cdot f_2^* + f_3^* \cdot f_3^* \\ K_\omega = e_1 \otimes f_1^* - e_2 \otimes f_2^* + e_3 \otimes f_3^* - f_1 \otimes e_1^* + f_2 \otimes e_2^* - f_3 \otimes e_3^* \\ \omega = \mathrm{Re}((e_1^* + i f_2^*) \wedge (e_2^* - i f_2^*) \wedge (e_3^* + i f_3^*)). \end{cases}$$

Notons $L_0 \in IE_\omega^{(2,1)}$ le sous-espace réel engendré par $\{f_1, f_2, f_3\}$. Soit $L \in IE_\omega^\dagger$ et $\{a_1, a_2, a_3\}$ une base orthonormée directe de L :

$$q_\omega(a_j, a_k) = \varepsilon_j \delta_{jk}$$

avec $\varepsilon_j = \pm 1$. Soit A l'endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire (pour la structure complexe K_ω) défini par $A \cdot f_j = a_j$. Il satisfait la relation

$$\overline{A}^t I_{(2,1)} A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

En comparant les déterminants de gauche et de droite dans cette égalité on constate que nécessairement

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} = I_{(2,1)}.$$

Ainsi $A \in U(2,1)$. De plus comme $\omega|_L = 0$, nécessairement A est de déterminant complexe 1 i.e. $A \in SU(2,1)$. Ainsi

$$IE^{\dagger}_{\omega} = \{A \cdot L_0 : A \in SU(2,1)\}.$$

De plus $AL_0 = L_0$ si et seulement si A est une matrice réelle. Donc

$$IE^{\dagger}_{\omega} = SU(2,1)/SO(2,1).$$

□

2. Grassmannienne associée à un opérateur pluriharmonique

Rappelons qu'un opérateur de Monge-Ampère pluriharmonique Δ_ω associé à une $2n$-forme ω sur T^*M (M étant une variété complexe de dimension complexe n) est un opérateur différentiel sur les fonctions pluriharmoniques $\mathcal{H}(M)$. Cet opérateur est uniquement déterminé par la partie bieffective de ω.

La grassmannienne associée en un point x est l'ensemble des plans bilagrangiens (ou lagrangiens complexes) de T_xT^*M sur lesquels ω_x s'annule. Nous étudions ici cette grassmannienne pour quelques exemples célébres d'équations de Monge-Ampère sur $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$.

Soit (V^4, Ω) un espace vectoriel symplectique complexe de dimension complexe 4. Soit $\omega \in \Lambda^4_{BE}(V^*)$ une 4-forme bieffective réelle et h_ω la forme hermitienne sur $W = \Lambda^2_E(V, \mathbb{C})$ associée (voir chapitre 2). Rappelons que W est un espace vectoriel complexe de dimension 5 muni d'un produit scalaire complexe q_Ω défini par

$$q_\Omega(\theta, \theta') = \frac{\theta \wedge \theta'}{\Omega^2}.$$

Soit $\Gamma : \Lambda^2(V, \mathbb{C}) \to \Lambda^2(V^*, \mathbb{C})$ l'isomorphisme induit par la forme symplectique complexe Ω entre les bivecteurs complexes de V et les 2-formes $\mathbb{C}$-linéaire sur V. Cet isomorphisme induit un plongement (appelé plongement de Plücker) de la grassmannienne des plans complexes de $\mathbb{C}^4$ dans le projectifié $\mathbb{C}P^5$ de $\Lambda^2(V^*, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^6$:

$$[X \wedge Y] \mapsto [\Gamma(X \wedge Y)].$$

L'image de cette application est l'ensemble des 2-formes décomposables i.e. l'ensemble des formes θ telles que $\theta \wedge \theta = 0$. Autrement dit lorsque l'on identifie $\Lambda^2(V^*, \mathbb{C})$ à $\mathbb{C}^6$ la grassmannienne des plans complexes de V s'identifie au cône isotrope projectif $q_\Omega = 0$ dans $\mathbb{C}P^5$

Notons X_θ l'unique bivecteur tel que $\Gamma(X_\theta) = \theta$ pour $\theta \in \Lambda^2(V^*, \mathbb{C})$. Un calcul direct montre le résultat suivant

LEMME 5.5. *Pour toutes formes θ et $\theta' \in \Lambda^2(V^*, \mathbb{C})$ l'égalité suivante est satisfaite*

$$\theta'(X_\theta) + 2\frac{\theta \wedge \theta'}{\Omega \wedge \Omega} = \perp(\theta)\perp(\theta') = \Omega(X_\theta)\Omega(X_{\theta'}).$$

En particulier pour toutes formes effectives θ et $\theta' \in \Lambda^2_E(V^*, \mathbb{C})$,

$$\theta'(X_\theta) = -2\frac{\theta \wedge \theta'}{\Omega \wedge \Omega}.$$

COROLLAIRE 5.6. *Soit X et $Y \in V$. Le sous-espace $X \wedge Y$ est un plan lagrangien complexe de (V, Ω) si et seulement si $\Gamma(X \wedge Y)$ est une forme effective non nulle sur V.*

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}\Omega(X\wedge Y) &= -2\frac{\Omega\wedge\Gamma(X\wedge Y)}{\Omega^2}+\Omega(X\wedge Y)\Omega(X_\Omega)\\ &= -2\frac{\Omega\wedge\Gamma(X\wedge Y)}{\Omega^2}+2\Omega(X\wedge Y)\end{aligned}$$

et donc

$$\Omega(X\wedge Y)\Omega^2=\Gamma(X\wedge Y)\wedge\Omega.$$

□

D'où la proposition

PROPOSITION 5.7. Γ *induit un isomorphisme entre la grassmannienne des plans lagrangiens complexes de* $\mathbb{C}^4$ *et le cône isotrope projectif* $\{q_\Omega=0\}$ *de* $\mathbb{C}P^4 = P(\Lambda^2_E(V^*,\mathbb{C}))$.

Intéressons nous maintenant aux plans lagrangiens complexes L sur lesquels s'annule ω.

DEFINITION 5.8. *On associe à* ω *la forme quadratique réelle* q_ω *sur* W *définie par*

$$q_\omega(\theta)=h_\omega(\theta,\theta).$$

LEMME 5.9. *Soit* θ *une 2-forme bieffective décomposable et* $L=[X_\theta]$ *le plan lagrangien associé.*

$$\omega|_L=0\Leftrightarrow q_\omega(\theta)=0.$$

DÉMONSTRATION. Décomposons ω dans une base $\{\sigma_1,\dots,\sigma_5\}$ de $\Lambda^2_E(V^*,\mathbb{C})$:

$$\omega=\sum_{j,k}a_{jk}\sigma_j\wedge\overline{\sigma_k}$$

$\omega|_L=0$ si et seulement si $\omega(X_\theta\wedge\overline{X_\theta})=0$. Or

$$\begin{aligned}\omega(X_\theta\wedge\overline{X_\theta}) &= \sum_{j,k}a_{jk}\sigma_j(X_\theta)\overline{\sigma_k}(\overline{X_\theta})\\ &= \sum_{j,k}a_{jk}\sigma_j(X_\theta)\overline{\sigma_k(X_\theta)}\\ &= 4\sum_{j,k}a_{jk}\sigma_j\wedge\theta.\overline{\sigma_k\wedge\theta}\\ &= 4h_\omega(\theta,\theta).\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

PROPOSITION 5.10. *L'ensemble des plans lagrangiens complexes sur lesquels s'annule* ω *s'identifie à la sous-variété algébrique réelle de* $\mathbb{C}P^4$

$$\begin{cases}q_\Omega=0\\ q_\omega=0.\end{cases}$$

Etudions maintenant quelques exemples. Fixons sur $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ les coordonnées $(z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2)$ et munissons $T^*\mathbb{C}^2$ des coordonnées symplectiques complexes induites

$$(z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, w_1 = p_1 - iq_1, w_2 = p_2 - iq_2),$$

la forme symplectique complexe sur $M = \mathbb{C}^4$ étant

$$\Omega = dz_1 \wedge dw_1 + dz_2 \wedge dw_2.$$

Fixons une base de l'espace des formes complexes effectives $W = \Lambda^2_E(\mathbb{C}^4, \mathbb{C})$:

$$\begin{cases} \sigma_1 = dz_1 \wedge dw_1 - dz_2 \wedge dw_2 \\ \sigma_2 = dz_1 \wedge dz_2 \\ \sigma_3 = dz_1 \wedge dw_2 \\ \sigma_4 = dw_1 \wedge dz_2 \\ \sigma_5 = dw_1 \wedge dw_2. \end{cases}$$

Le produit scalaire $q_\Omega(\theta, \theta') = \frac{\theta \wedge \theta'}{\Omega^2}$ s'écrit dans cette base

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$ le système de coordonnées complexe associé à cette base. La grassmannienne des plans lagrangiens complexes s'identifie au sous-ensemble de $\mathbb{C}P^4$:

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}^4) = \{[\alpha_1, \ldots, \alpha_5] \in \mathbb{C}P^4 : \alpha_1^2 + \alpha_2\alpha_5 - \alpha_3\alpha_4 = 0\}.$$

Nous nous intéressons aux exemples d'équations de Monge-Ampère suivants

(1) Equations associées aux variétés kählériennes spéciales :

$$\begin{cases} \operatorname{hess}(f) = 1 & \text{(hessien elliptique)} \\ \operatorname{hess}(f) = -1 & \text{(hessien hyperbolique)} \end{cases}$$

(2) Equations auto-duales gravitationnelles :
Ces équations ont été obtenues par Plebanski et Przanowski dans [**PP**] à partir de réductions symétriques des équations de Yang-Mills auto-duales :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_2} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial x_2} = 1 & \text{(équation de Plebanski I)} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \dfrac{\partial^2}{\partial y_1^2} - (\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1})^2 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} = 0 & \text{(équation de Plebanski II)} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_2} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial y_1} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial y_2} = 0 & \text{(équation de Grant).} \end{cases}$$

En utilisant 2.14 on peut calculer les formes quadratiques associées à ces équations :

$$\begin{cases} q_{H+}(\alpha) = |\alpha_2|^2 - |\alpha_5|^2 & \text{(hessien elliptique)} \\ q_{H-}(\alpha) = |\alpha_2|^2 + |\alpha_5|^2 & \text{(hessien hyperbolique)} \\ q_{PI}(\alpha) = |\alpha_1|^2 + |\alpha_5|^2 & \text{(Plebanski I)} \\ q_{PII}(\alpha) = 2\,\mathrm{Re}(\alpha_1\overline{\alpha_5}) - |\alpha_3|^2 & \text{(Plebanski II)} \\ q_G(\alpha) = \dfrac{1}{2}\{\mathrm{Re}(\alpha_3\overline{\alpha_4} + \alpha_3\overline{\alpha_5} - 2\alpha_2\overline{\alpha_5}) - |\alpha_1|^2\} & \text{(Grant).} \end{cases}$$

Le calcul de la signature ε pour chacune de ces formes quadratiques nous permet de constater que toutes ces équations sont dans des orbites différentes pour l'action de $Sp(2,\mathbb{C})$ sauf peut être l'équation hessien hyperbolique et l'équation de Plebanski I :

$$\begin{cases} \varepsilon(q_{H_+}) = (1,1) \\ \varepsilon(q_{H_-}) = \varepsilon(q_{PI}) = (2,0) \\ \varepsilon(q_{PII}) = (1,2) \\ \varepsilon(q_G) = (2,3). \end{cases}$$

Dans le cas où les deux signatures coïncident il nous faut un autre argument pour séparer ces deux orbites. Notons pour une 4-forme bieffective réelle ω, $A_\omega : W \to W$ l'endomorphisme $\mathbb{C}$-antilinéaire associé à la forme hermitienne h_ω. On constate que l'action de $Sp(2,\mathbb{C})$ est

$$A_{F^*\omega} = FA_\omega F^{-1}$$

Or on peut vérifier que les endomorphismes A_{H_-} et A_{PI} associées aux équations hessien hyperbolique et Plebanski I n'ont pas la même forme de Jordan et ne sont donc pas semblables : ces deux équations ne sont pas dans la même orbite.

Remarquons enfin que pour ces deux équations, la forme particulièrement simple de la forme quadratique nous permet de décrire toutes les solutions pluriharmoniques. Elles s'écrivent dans $\mathbb{C}^4 = T^*\mathbb{C}^2$ de coordonnées (z_1, z_2, w_1, w_2) :

(1) hessien hyperbolique

$$L = \{(z_1, cz_1 + d, -cw_2 + e, w_2) : (z_1, w_2) \in \mathbb{C}^2\}$$

où c, d et e sont des constantes complexes

(2) Plebanski I

$$L = \{(z_1, c, F(z_1), w_2) : (z_1, w_2) \in \mathbb{C}^2\}$$

où c est une constante complexe et $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe.

3. Classes caractéristiques des équations de Monge-Ampère

Zilbergleit a calculé dans [**Z3**] la cohomologie modulo 2 des grassmanniennes associées aux équations de Monge-Ampère à coefficients constants sur $\mathbb{R}^3$. Ce calcul est basé sur la classifiation de Lychagin et Roubtsov ([**LR3**]) dans laquelle manque l'équation lagrangienne spéciale

$$\Delta f - \mathrm{hess}(f) = 0.$$

Toutefois, la grassmannienne associée est l'espace homogène $SU(3)/SO(3)$ et le calcul de la cohomologie de cet espace modulo 2 a été effectué par Borel ([**Bor**]) puis Fuks ([**Fu**]). Borel a notamment montré que les générateurs de la cohomologie modulo 2 de la grassmannienne des sous-espaces lagrangiens orientés de $\mathbb{R}^{2n}$

(grassmannienne qui s'identifie à $U(n)/SO(n)$) sont les classes de Stiefel-Whitney $w_i \in H^i(U(n)/SO(n), \mathbb{Z}_2)$ du fibré tautologique de cette grassmannienne. Ces classes sont bien sûr de carré nul :

$$H^*(U(n)/SO(n), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1, \ldots, w_n]/(w_1^2, \ldots, w_n^2).$$

Utilisant alors le difféomorphisme naturel $U(n)/SO(n) \cong S^1 \times SU(n)/SO(n)$ on en déduit que

$$H^*(SU(n)/SO(n), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_2, \ldots, w_n]/(w_2^2, \ldots, w_n^2).$$

La première classe de Stiefel-Whitney n'apparait pas puisque $SU(n)/SO(n)$ est orientable. On peut trouver une démonstration plus récente de ce résultat dans [**MT**]. Nous proposons ici une autre démonstration (partielle) en utilisant les techniques de Zilbergleit.

Soit Ω la forme symplectique naturelle sur $\mathbb{R}^6 = T^*\mathbb{R}^3$ et (q, p) le système de coordonnées symplectique canonique :

$$\Omega = \sum_{i=1}^{3} dq_i \wedge dp_i.$$

Notons $\pi : T^*\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection naturelle :

$$\pi(q, p) = q.$$

On note pour L sous-espace vectoriel de $T^*\mathbb{R}^3$,

$$L_p = L \cap \mathrm{Ker}(\pi).$$

Soit $I = U(3)/SO(3)$ la grassmannienne des sous-espaces lagrangiens orientés de $T^*\mathbb{R}^3$ et pour $k \in \mathbb{N}$,

$$X_k = \big\{L \in I : \dim(L_p) \geq 3 - k\big\}.$$

Soit $(E_r^{a,b}, d_r^{a,b})$ la suite spectrale définie par la filtration

$$\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset X_3 = I.$$

Par exemple les termes $E_1^{a,b} = H^{a+b}(X_a/X_{a-1}, \mathbb{Z}_2)$ sont de la forme

0	0	0	0
0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0
0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0
$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	0

THEOREME 5.11 (Borel [**Bor**]). *La suite spectrale $(E_r^{a,b}, d_r^{a,b})$ stabilise au premier pas et converge vers la cohomologie $H^*(I, \mathbb{Z}_2)$. Une conséquence directe est la relation*

$$H^*(I, \mathbb{Z}_2) \overset{(3)}{\simeq} \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, w_3]/(w_1^2, w_2^2, w_3^2),$$

les w_i étant les classes de Stiefel Whitney du fibré tautologique de la grassmannienne I. (On note $\overset{(n)}{\simeq}$ un isomorphisme jusqu'a l'ordre n d'algèbres graduées).

Soit $\omega \in \Lambda^3(\mathbb{R}^6)$ et IE_ω la grassmannienne des sous-espaces lagrangiens sur lesquels s'annule ω :

$$IE_\omega = \{L \in I : \omega|_L = 0\}.$$

Soit $X_\omega^k = X_k \cap IE_\omega$. L'idée de Zilbergleit est de comparer la suite spectrale $(E_r^{a,b}(\omega), d_r^{a,b})$ définie par la filtration

$$\emptyset = X_\omega^{-1} \subset X_\omega^0 \subset X_\omega^1 \subset X_\omega^2 \subset X_\omega^3 = IE_\omega$$

avec la suite spectrale $(E_r^{a,b}(\omega), d_r^{a,b})$ pour calculer $H^*(IE_\omega, \mathbb{Z}_2)$ jusqu'a l'ordre 3.

Calculons donc les termes $E_1^{a,b}(\omega)$ dans le cas où ω est la forme lagrangienne spéciale

$$dp_1 \wedge dp_2 \wedge dq_3 - dp_1 \wedge dp_3 \wedge dq_2 + dp_2 \wedge dp_3 \wedge dq_1 - dq_1 \wedge dq_2 \wedge dq_3.$$

Nous devons pour cela décrire les espaces topologiques $X_\omega^p / X_\omega^{p-1}$ pour $p = 0, 1, 2, 3$.

Notons $V = T^*\mathbb{R}^3$, V_q l'espace engendré par les $\frac{\partial}{\partial q_i}$ et V_p l'espace engendré par les $\frac{\partial}{\partial p_i}$.

(1) Etude de $X_\omega^0 / X_\omega^{-1}$

L'unique sous-espace lagrangien L contenu dans $\mathrm{Ker}(\pi)$ est V_p. Puisque $\omega(\frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2}, \frac{\partial}{\partial p_3}) = 0$ on en déduit que

$$X_\omega^0 / X_\omega^{-1} = \{V_p\}.$$

(2) Etude de X_ω^1 / X_ω^0

Soit $L \in IE_\omega$ tel que le sous-espace L_p de V_p soit de dimension 2. Notons X_ξ l'unique vecteur tel que $i_{X_\xi}\Omega = \xi$ pour $\xi \in V^*$. Une base de L_p est $\{X_{\xi_1}, X_{\xi_2}\}$ avec ξ_1 et $\xi_2 \in V_q^*$:

$$\begin{cases} \xi_1 \wedge \xi_2 = a dq_1 \wedge dq_2 + b dq_1 \wedge dq_3 + c dq_2 \wedge dq_3 \\ X_{\xi_1} \wedge X_{\xi_2} = a dp_1 \wedge dp_2 + b dp_1 \wedge dp_3 + c dp_2 \wedge dp_3. \end{cases}$$

La 1-forme $i_{X_{\xi_1} \wedge X_{\xi_2}}\omega$ ne dépend que de dq_1, dq_2 et dq_3 : c'est une 1-forme sur V_q. Soit $u \in L$ tel que $L = L_p \oplus \mathbb{R}u$. Notons $u = u_q + u_p$ avec $u_q \in V_q$ et $u_p \in V_p$. Le vecteur u_q est non nul puisque L_q est de dimension 2. Puisque L est isotrope on a pour $i = 1, 2$

$$\xi_i(u_q) = \Omega(X_\xi, u_q) = \Omega(X_\xi, u) = 0.$$

Et donc $\mathrm{Ker}(\xi_1) \cap \mathrm{Ker}(\xi_2) = \mathbb{R}u_q$. De plus

$$\omega(X_{\xi_1}, X_{\xi_2}, u_q) = \omega(X_{\xi_1}, X_{\xi_2}, u) = 0.$$

Ainsi, la 1-forme $i_{X_{\xi_1} \wedge X_{\xi_2}}\omega$ s'annule sur $\mathrm{Ker}(\xi_1) \cap \mathrm{Ker}(\xi_2)$ et donc

$$(i_{X_{\xi_1} \wedge X_{\xi_2}}\omega) \wedge \xi_1 \wedge \xi_2 = 0.$$

Ceci s'écrit

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Finalement

$$X_\omega^1 / X_\omega^0 = \emptyset.$$

(3) Etude de X_ω^2 / X_ω^1

X^2_ω/X^1_ω est un fibré au dessus de $\mathbb{R}P^2$ de projection $\pi : L \mapsto L_p$. Déterminons $\pi^{-1}(L_p)$. Munissons pour cela $V = T^*\mathbb{R}^3$ du produit scalaire

$$\begin{cases} \langle \frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial q_j} \rangle = \delta_{ij} \\ \langle \frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial p_j} \rangle = \delta_{ij} \\ \langle \frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial p_j} \rangle = 0. \end{cases}$$

Soit X_ξ un vecteur de norme 1 de $L_p \subset V_p$ et $\xi \in V_q^*$ la forme sur V_q correspondante. Fixons une base orthonormée directe $\{u, v\}$ de $\mathrm{Ker}(\xi)$.

Soit $L \in \pi^{-1}(L_p)$. Puisque L est lagrangien, on peut toujours trouver deux vecteurs a et b de V_p orthogonaux à X_ξ (pour le produit scalaire $\langle , \rangle$) tels que $\{X_\xi, u + a, v + b\}$ est une base de L. Ces vecteurs a et b doivent vérifier de plus

$$\begin{cases} \Omega(u + a, v + b) = 0 \\ \omega(X_\xi, u + a, v + b) = 0. \end{cases}$$

La première condition se réécrit

$$\langle u, \tilde{b} \rangle = \langle v, \tilde{a} \rangle,$$

$\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ étant les images de a et b dans V_q par l'isomorphisme $\frac{\partial}{\partial p_i} \mapsto \frac{\partial}{\partial q_i}$. On vérifie sans peine que la seconde condition s'écrit

$$\langle \tilde{X_\xi} \wedge u, \tilde{b} \rangle = \langle \tilde{X_\xi} \wedge v, \tilde{a} \rangle,$$

où $\tilde{X_\xi} \wedge u$ est le produit vectoriel usuel sur $V_q = \mathbb{R}^3$. Finalement a et b vérifient

$$\begin{cases} \langle \tilde{a}, \tilde{X_\xi} \rangle = 0 \\ \langle \tilde{b}, \tilde{X_\xi} \rangle = 0 \\ \langle \tilde{b}, u \rangle = \langle \tilde{a}, v \rangle \\ \langle \tilde{b}, v \rangle = -\langle \tilde{a}, u \rangle. \end{cases}$$

On a ainsi construit un isomorphisme entre X^2_ω/X^1_ω et $T^*\mathbb{R}P^2$, où

$$T^*_{X_\xi}\mathbb{R}P^2 = \big\{a \in \mathbb{R}^3 : \langle a, X_\xi \rangle = 0\big\}.$$

(4) Etude de X^3_ω/X^2_ω

Si $L \in X^3_\omega/X^2_\omega$ alors $L_p = \{0\}$. Il existe donc trois vecteurs u_1, u_2 et u_3 de V_p uniquement déterminés tels que $\{\frac{\partial}{\partial q_1} + u_1, \frac{\partial}{\partial q_2} + u_2, \frac{\partial}{\partial q_3} + u_3\}$ est une base de L. Ecrivons pour $i = 1, 2, 3$

$$u_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial p_j}.$$

Puisque L est lagrangien, $\Omega(\frac{\partial}{\partial q_i} + u_i, \frac{\partial}{\partial q_j} + u_j) = 0$ pour $i, j = 1, 2, 3$. Autrement dit

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}.$$

La matrice $\alpha = \Big(\alpha_{ij}\Big)_{i,j=1}^{3}$ est donc symétrique. De plus

$$\omega(\frac{\partial}{\partial q_1} + u_1, \frac{\partial}{\partial q_2} + u_2, \frac{\partial}{\partial q_3} + u_3) = 0.$$

Ceci s'écrit

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 + \alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{13}^2 + \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2 - 1 = 0.$$

Soit alors le changement de variables

$$\begin{cases} \alpha_{11} = \dfrac{x_1}{\sqrt{3}} - x_2 - \dfrac{x_3}{\sqrt{3}} \\ \alpha_{22} = \dfrac{x_1}{\sqrt{3}} + x_2 - \dfrac{x_3}{\sqrt{3}} \\ \alpha_{33} = \dfrac{x_1}{\sqrt{3}} + \dfrac{2x_3}{\sqrt{3}} \\ \alpha_{12} = x_4 \\ \alpha_{13} = x_5 \\ \alpha_{23} = x_6. \end{cases}$$

X_ω^3/X_ω^2 est isomorphe à l'hypersurface de $\mathbb{R}^6$

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 = 1.$$

Cette hypersurface a deux composantes connexes R_1 et R_2 homéomorphes toutes deux à $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{cases} R_1 = \{(\sqrt{1 + \|x\|^2}, x) : x \in \mathbb{R}^5\} \\ R_2 = \{(-\sqrt{1 + \|x\|^2}, x) : x \in \mathbb{R}^5\}. \end{cases}$$

Ces calculs se résument ainsi

X_ω^0/X_ω^{-1}	$\{\star\}$
X_ω^1/X_ω^0	$\emptyset$
X_ω^2/X_ω^1	$T^*\mathbb{R}P^2$
X_ω^3/X_ω^2	$\mathbb{R}^5 \times \mathbb{Z}_2$

On obtient alors les termes $E_1^{(a,b)}(\omega) = H^{a+b}(X_\omega^a/X_\omega^{a-1})$:

0	0	0	0
0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
0	0	$\mathbb{Z}_2$	0
$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	0

Répétant alors les arguments donnés dans [**Z3**] on complète le théorème de Zilbergleit de la façon suivante

PROPOSITION 5.12. *Soit $\omega \in \Lambda_\varepsilon^3(\mathbb{R}^6)$ une trois forme effective et q_ω la métrique de Lychagin-Roubtsov associée.*

(1) si $\varepsilon(q_\omega) = (3,3)$ alors

$$H^*(IE_\omega, \mathbb{Z}_2) \overset{(3)}{\simeq} \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, u_2]/(w_1^2, w_1.u_2).$$

(2) si $\varepsilon(q_\omega) = (0,6)$ alors

$$H^*(IE_\omega, \mathbb{Z}_2) \overset{(3)}{\simeq} \mathbb{Z}_2[w_2, w_3]/(w_2^2, w_3^2).$$

(3) si $\varepsilon(q_\omega) = (4,2)$ *alors*

$$H^*(IE_\omega, \mathbb{Z}_2) \overset{(3)}{\simeq}= \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, u_2]/(w_1^2).$$

Conclusion

Ce travail apparait comme une généralisation en dimension 3 des différents résultats (connus de l'auteur) sur le problème d'équivalence locale des équations de Monge-Ampère en dimension 2. De nombreuses questions restent cependant sans réponses (curieusement, il semble même y en avoir plus aujourd'hui qu'il y a trois ans ...). Nous présentons ici quelques pistes de recherche qui pourraient être un prolongement naturel de cette thèse. Nous espérons qu'elles donneront lieu à de prochain travaux.

(1) Que se passe t'il en dimension 4 et plus ? Nous avons apporté une réponse très partielle en introduisant la notion de solution pluriharmonique. Ceci permet de distinguer sur quelques exemples des équations différentes. Lychagin et Roubtsov ont aussi étudié quelques orbites particulières qui ont de fortes symétries (qu'ils appellent transvections caractéristiques, voir [**LR3**]). Ces réponses sont bien sûr loin d'être satisfaisantes. Nous avons déjà souligné que l'espace des orbites devient beaucoup plus compliqué en dimension 4 et plus. En dimension 4, quelques résultats sur la géométrie des 4-formes effectives existent cependant, dûs notamment à Antonyan ([**An**]) et Katanova ([**Ka**]), basés sur la décomposition $\mathbb{Z}_2$ graduée de l'algèbre de Lie exceptionnelle E_6 :

$$E_6 = sp(4) \oplus \Lambda^4_\varepsilon(\mathbb{R}^8).$$

Ces résultats seront peut être utilisables pour donner une description d'un grand nombre d'équations de Monge-Ampère sur $\mathbb{R}^4$ mais il est impossible de donner une classification exhaustive (c'est à dire discrète) de toutes les orbites. Un point de vue plus global s'impose alors pour comprendre la géométrie de ces équations en toutes dimensions. On peut donner ici deux approches différentes. La première consisterait à étudier l'espace des modules des formes effectives du point de vue de la théorie des déformations de MacLean. Goto ([**Got**]) a par exemple obtenu des résultats très intéressants en "déformant" des exemples de calibrations comme la calibration lagrangienne spéciale ou les calibrations exceptionnelles. La seconde approche consisterait à considérer qu'une équation différentielle provient d'un phénomène physique sur un espace donné. L'idée que nous voudrions développer est que le nombre de structures de Monge-Ampère globales sur cet espace est limité par des contraintes topologiques ou géométriques. Paradoxalement, il sera peut être plus facile de décrire l'ensemble des équations de Monge-Ampère sur S^n ou T^n par exemple que sur $\mathbb{R}^n$.

(2) Il reste toutefois beaucoup de pistes à explorer en dimension 3 déjà. Les variétés lagrangiennes spéciales ont des propriétés remarquables en théorie des déformations par exemple. McLean a notamment montré que l'espace

des déformations d'une sous-variété lagrangienne compacte L est une variété lisse et que son espace tangent en L s'identifie à l'espace des 1-formes harmoniques sur L. Il semble très vraisemblable que le résultat reste vrai pour une sous-variété compacte calibrée par une structure de Monge-Ampère (Ω, ω) non dégénérée sur une variété lisse de dimension 6 : l'espace des déformations d'une sous-variété L compacte calibrée est *en général* une variété lisse dont l'espace tangent en L s'identifie à l'espace des 1-formes harmoniques pour l'opérateur de Hodge associé à la (pseudo) métrique q_ω de Lychagin-Roubtsov. Il faut rester toutefois prudent sur le terme *en général*. La différence essentielle avec le cas des variétés lagrangiennes spéciales est justement la métrique indéfinie q_ω et l'approche de McLean doit peut être modifiée dans le cas pseudo riemannien. Au delà de cette théorie des déformations, il nous semble que la construction proposée de ces structures de Calabi-Yau généralisées est suffisamment *naturelle* pour avoir une signification physique. Il est alors naturel de se demander si les variétés munies d'une structure de Monge-Ampère non dégénérées ont un *partenaire miroir* et si la conjecture miroir de Strominger Yau et Zaslow peut ainsi se formuler en termes d'équations de Monge-Ampère.

(3) Une autre généralisation possible est celle des équations de Monge-Ampère tout simplement. Peut on adopter une approche similaire pour une plus grande famille d'équations (d'ordre 3, 4, etc.) présentant une non linéarité du type déterminant ? Nous pensons en particulier aux équations d'associativité (WDVV) en théorie topologique bidimensionnelle des champs ou aux équations satisfaites par les fonctions de corrélation de modèles intégrables de théorie des champs quantiques. Par exemple, la fonction de corrélation paire du modèle de Ising vérifie

$$\begin{vmatrix} \tau & \tau_z & \tau_{zz} \\ \tau_{\bar z} & \tau_{z\bar z} & \tau_{zz\bar z} \\ \tau_{\bar z\bar z} & \tau_{z\bar z\bar z} & \tau_{zz\bar z\bar z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau_{z\bar z} & \tau_z & \tau_{zz} \\ \tau_{\bar z} & \tau & \tau_z \\ \tau_{\bar z\bar z} & \tau_{\bar z} & \tau_{z\bar z} \end{vmatrix},$$

(avec $\tau_z = \frac{\partial\tau}{\partial z}$, etc.). Il semble naturel d'étudier les formes différentielles sur l'espace des k-jets pour décrire de telles équations et utiliser la distribution de Cartan (ou le crochet de Maier, voir par exemple [**KL**]) en lieu et place de la structure de contact pour généraliser les travaux de Lychagin sur l'espace des 1-jets et les opérateurs de Monge-Ampère. On peut aussi étudier directement l'espace des jets infinis en utilisant la "C-distribution" définie par Vinogradov et dévopper ainsi une étude plus systématique des invariants scalaires différentiels, des symétries et des lois de conservations des équations de Monge-Ampère "généralisées".

Les réponses apportées dans cette thèse au problème d'équivalence locale des équations de Monge-Ampère doivent aussi trouver des applications plus concrètes. Voici trois exemples que nous nous proposons de développer par la suite.

(1) En météorologie théorique, des équations de Monge-Ampère apparaissent très naturellement dans certains modèles décrivant le flux hydrodynamique de l'atmosphère ou des océans, comme le modèle semi-géostrophique ou le modèle quasi-géostrophique. L'équation d'inversion du "potentiel tourbillon" ([**Ho**])

peut s'écrire par exemple en dimension 3

$$\Delta_{x,y}\Phi + \frac{f^2}{N^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{f^2}\,\mathrm{hess}_{x,y}\,\Phi = f^2,$$

f et N étant des "constantes" physiques. Roulstone et Roubtsov ([**RR**]) ont montré comment, en dimension 2, une transformation symplectique permet de changer de modèle, c'est à dire de changer le domaine de validité de ces constantes. De la même façon, les différents types possibles de l'équation d'inversion en dimension 3 (hessien ou lagrangien spécial par exemple) vont peut être correspondre à des modèles différents. Les limites de ces modèles seront alors données par la dégénérescence de notre équation.

(2) Les théories des représentations des équations différentielles permettent de construire certaines familles de solutions. Il est connu par exemple que l'équation $\mathrm{hess}(f) = -1$ admet une représentation de Hirota en dimension 2, ce qui doit permettre de construire des solutions "solitoniques". Une comparaison plus approfondie de la théorie des opérateurs de Monge-Ampère avec la théorie de Hirota devrait permettre de construire plus d'exemples.

(3) Nous avons caractérisé dans cette thèse les solutions complexes (ou pluriharmoniques) de certaines équations de Monge-Ampère en 4 variables et notamment les équations obtenues par réductions symétriques des équations de Yang-Mills auto-duales. Cette approche devrait permettre en particulier de construire des solutions algébriques complexes. Elle doit aussi permettre de distinguer des équations différentes. Par exemple, l'équation de Grant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial y_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial y_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial y_1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial y_2} = 0$$

et l'équation de Husain

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial y_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial y_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial y_1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial y_2} = 0$$

sont elles réellement différentes ? La réponse n'est pas claire. Tous les invariants connus de l'auteur associés à l'action des symplectomorphismes complexes de $\mathbb{C}^2$ coïncident pour ces deux équations, ce qui nous fait supposer qu'elles sont équivalentes du point de vue pluriharmonique. Sont elles équivalentes pour l'action du groupe des symplectomorphismes réels ? Il se peut que la réponse soit positive et qu'ainsi les modèles qu'elles décrivent en théorie de la gravitation coïncident. Nous espérons clarifier la situation en étudiant notamment les invariants de Antonyan et Katanova associés aux deux formes effectives correspondantes.

Annexe A

THEOREME. *Toute* 3*-forme effective sur un espace symplectique de dimension* 6 *est dans une et une seule des* $Sp(3)$*-orbites décrites dans la table* 1.

Démonstration. Soit Ω la forme symplectique sur V et soit $\omega \in \Lambda^3(V^*)$. La proposition 2.5 dit que si $q_\omega = 0$ alors ω est dans l'orbite de $f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*$. Supposons donc que $q_\omega \neq 0$. Choisissons (A, B, W) comme dans la proposition 2.14 :

$$\omega = \Omega_A \wedge \omega_1 + \Omega_B \wedge \omega_2,$$

ω_1 et ω_2 étant effectives sur l'espace symplectique (W, Ω') et Ω' et ω_2 étant effectives sur l'espace symplectique (W, ω_1).

Ω' étant non dégénérée, Ω' est nécessairement elliptique ou hyperbolique sur (W, ω_1). La forme ω_2 peut être elliptique, hyperbolique, parabolique ou nulle. Le cas ellitpique-elliptique a déjà été étudié au chapitre 2 de cette thèse. Etudions les sept autres cas.

(1) ω_2 est hyperbolique

Il existe d'après la proposition 2.1 une base (a_1, a_2, b_1, b_2) de W dans laquelle

$$\begin{cases} \omega_1 = a_1^* \wedge b_1^* + a_2^* \wedge b_2^* \\ \omega_2 = \lambda(a_1^* \wedge b_1^* - a_2^* \wedge b_2^*), \quad \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Comme $\Omega' \wedge \omega_1 = \Omega' \wedge \omega_2 = 0$, il existe quatre réels p, q, r, s tels que

$$\Omega' = a_1^* \wedge (pa_2^* + qb_2^*) + b_1^* \wedge (ra_2^* + sb_2^*)$$

De plus $qr - ps = \varepsilon\mu^2$ avec $\varepsilon = \pm 1$ et $\mu \neq 0$ puisque Ω' est non dégénérée. Soit le changement de base sur W

$$\begin{cases} c_1^* = a_1^* \\ d_1^* = b_1^* \\ \mu c_2^* = \varepsilon(ra_2^* + sb_2^*) \\ \mu d_2^* = pa_2^* + qb_2^*. \end{cases}$$

Dans la nouvelle base on a

$$\begin{cases} \omega_1 = c_1^* \wedge d_1^* + c_2^* \wedge d_2^* \\ \omega_2 = \lambda(c_1^* \wedge d_1^* - c_2^* \wedge d_2^*) \\ \Omega' = \mu(c_1^* \wedge d_2^* + \varepsilon d_1^* \wedge c_2^*). \end{cases}$$

Considérons alors la base symplectique $(r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3)$ de (V, Ω) définie par

$$\begin{cases} r_1 = \mu A, & s_1 = \frac{1}{\mu} B \\ r_2 = \dfrac{1}{\mu} c_1, & s_2 = d_2 \\ r_3 = -\dfrac{\varepsilon}{\mu} c_2, & s_3 = d_1. \end{cases}$$

Puisque $\omega = \Omega_A \wedge \omega_1 + \Omega_B \wedge \omega_2$, il vient

$$\omega = (s_1^* - \lambda\mu^2 r_1^*) \wedge r_2^* \wedge s_3^* + \varepsilon(s_1^* + \lambda\mu^2 r_1^*) \wedge s_2^* \wedge r_3^*.$$

Finalement, dans la base symplectique $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$ définie par

$$\begin{cases} e_1^* = s_1^* - \lambda\mu^2 r_1^*, & f_1^* = -\frac{s_1^* + \lambda\mu^2 r_1^*}{2\lambda\mu^2} \\ e_2^* = r_2^*, & f_2^* = s_2^* \\ e_3^* = s_3^*, & f_3^* = -r_3^*, \end{cases}$$

il vient

$$\omega = e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + \nu f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*$$

avec $\nu \neq 0$.

(2) ω_2 est elliptique et Ω' est hyperbolique

On applique le raisonnement précédent en inversant ω_2 et Ω' : il existe une base (a_1, a_2, b_1, b_2) de W dans laquelle

$$\begin{cases} \omega_1 = a_1^* \wedge b_1^* + a_2^* \wedge b_2^* \\ \omega_2 = \mu(a_1^* \wedge b_2^* - a_2^* \wedge b_1^*), & \mu \neq 0 \\ \Omega' = \lambda(a_1^* \wedge b_1^* - a_2^* \wedge b_2^*) & \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Dans la base symplectique $(c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3)$ de (V, Ω) définie par

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{\lambda} A, & d_1 = \lambda B \\ c_2 = \dfrac{1}{\lambda} a_1, & d_2 = b_1 \\ c_3 = b_2, & d_3 = \frac{1}{\lambda} a_2, \end{cases}$$

on a alors

$$\omega = c_1^* \wedge (c_2^* \wedge d_2^* - c_3^* \wedge d_3^*) - \frac{\mu}{\lambda^2} d_1^* \wedge (c_2^* \wedge c_3^* + d_2^* \wedge d_3^*).$$

Ainsi, dans la base symplectique $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$ de (V, Ω) définie par

$$\begin{cases} e_1^* = c_1^*, & s_1^* = d_1^* \\ e_2^* + e_3^* = \nu c_2^*, & \frac{f_2^* + f_3^*}{2} = \frac{d_2^*}{\nu} \\ \dfrac{f_2^* - f_3^*}{2} = \nu c_3^*, & f_2^* - f_3^* = \frac{d_3^*}{\nu} \end{cases}$$

avec $\frac{\mu}{\lambda^2} = \varepsilon\nu^2$, $\varepsilon = \pm 1$ et $\nu \neq 0$, ω s'écrit

$$\omega = \varepsilon f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + \varepsilon\xi^2 f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*.$$

Quitte à échanger e_2 avec e_3 et f_2 avec f_3 ceci se réécrit

$$\omega = f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + \xi^2 f_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*.$$

(3) ω_2 est parabolique

Il existe une base (a_1, a_2, b_1, b_2) de W dans laquelle

$$\begin{cases} \omega_1 = a_1^* \wedge b_1^* + a_2^* \wedge b_2^* \\ \omega_2 = a_1^* \wedge b_2^* \\ \Omega' = pa_1^* \wedge a_2^* + qa_1^* \wedge b_2^* + rb_1^* \wedge b_2^* + s(a_1^* \wedge b_1^* - a_2^* \wedge b_2^*), \quad pr + s^2 \neq 0. \end{cases}$$

Soit $C_t : W^* \to W^*$ l'automorphisme défini dans la base $(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$ par

$$C_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour $t \in \mathbb{R}$. Cet automorphisme laisse invariant ω_1 et ω_2 et modifie Ω' de la façon suivante

$$(p, q, r, s) \xrightarrow{C_t} (p, q, r - pt^2 - 2st, s + pt).$$

Appliquons C_{t_0} avec t_0 tel que $r' = r - pt^2 - 2st$ est non nul (t_0 existe car r, p et s ne sont pas tous les trois nuls). Puis remplaçons b_1^* par $b_1^* - \frac{q}{r'} a_1^*$. Les formes ω_1 et ω_2 sont inchangées par cette opération et l'expression de Ω' devient

$$\Omega' = (p, 0, r, s), \ pr + s^2 \neq 0.$$

(a) $p = 0$

Appliquons C_{t_1} avec $t_1 = \frac{r}{2s}$. Dans la base obtenue on a

$$\begin{cases} \omega_1 = a_1^* \wedge b_1^* + a_2^* \wedge b_2^* \\ \omega_2 = a_1^* \wedge b_2^* \\ \Omega' = s(a_1^* \wedge b_1^* - a_2^* \wedge b_2^*), \quad s \neq 0. \end{cases}$$

Soit alors la base symplectique $(c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3)$ de (V, Ω) définie par

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{s} A, & d_1 = sB \\ c_2 = \dfrac{1}{s^2} a_1, & d_2 = sb_1 \\ c_3 = \dfrac{1}{s^2} a_2, & d_3 = -sb_2. \end{cases}$$

Dans cette base ω s'écrit

$$\omega = d_1^* \wedge (c_2^* \wedge d_2^* - c_3^* \wedge d_3^*) + c_1^* \wedge c_2^* \wedge d_3^*.$$

Finalement, dans la base symplectique $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$ de (V, Ω) définie par

$$\begin{cases} e_1^* = d_1^*, & f_1^* = -c_1^* \\ e_2^* + e_3^* = c_2^*, & \frac{f_2^* + f_3^*}{2} = d_2^* \\ \dfrac{e_2^* - e_3^*}{2} = d_3^*, & f_3^* - f_2^* = c_3^*, \end{cases}$$

on a

$$\omega = f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^*.$$

(b) $p \neq 0$

Appliquons C_{t_2} avec $t_2 = -\frac{s}{p}$. Dans la base obtenue on a

$$\begin{cases} \omega_1 = a_1^* \wedge b_1^* + a_2^* \wedge b_2^* \\ \omega_2 = a_1^* \wedge b_2^* \\ \Omega' = pa_1^* \wedge a_2^* + rb_1^* \wedge b_2^*), \quad pr \neq 0. \end{cases}$$

Soit $(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3)$ la base symplectique de (V, Ω) définie par

$$\begin{cases} u_1 = A & v_1 = B \\ u_2 = \dfrac{1}{p} a_1 & v_2 = a_2 \\ u_3 = \dfrac{1}{r} b_1 & v_3 = b_2. \end{cases}$$

La forme ω s'écrit dans cette base

$$\omega = v_1^* \wedge (\alpha u_2^* \wedge u_3^* + v_2^* \wedge v_3^*) + \beta u_1^* \wedge u_2^* \wedge v_3^*.$$

Définissons la base symplectique $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$ par

$$\begin{cases} e_1^* = -\lambda v_1^* & f_1^* = \frac{1}{\lambda} u_1^* \\ e_2^* = \lambda \mu u_2^* & f_2^* = \frac{1}{\lambda\mu} v_2^* \\ e_3^* = \mu v_3^* & f_3^* = -\frac{1}{\mu} u_3^*, \end{cases}$$

avec $\alpha = \varepsilon_1 \lambda^2$ et $\beta = \varepsilon_2 \mu^2$ ($\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$). On obtient finalement l'expression de ω suivante

$$\omega = \varepsilon_1 f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + \varepsilon_2 f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*.$$

En appliquant alors une permutation circulaire sur les indices, on vérifie que ω est dans l'une des deux orbites

$$\begin{cases} f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* \\ f_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* - f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^* + f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^*. \end{cases}$$

(4) $\omega_2 = 0$

Il existe une base (a_1, a_2, b_1, b_2) de W dans laquelle

$$\begin{cases} \omega_1 = a_1^* \wedge b_1^* + a_2^* \wedge b_2^* \\ \omega_2 = 0 \\ \Omega' = \lambda(a_1^* \wedge b_2^* + \varepsilon a_2^* \wedge b_1^*), \quad \lambda \neq 0, \varepsilon = \pm 1. \end{cases}$$

Dans la base symplectique $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$ de (V, Ω) définie par

$$\begin{cases} e_1 = \lambda B, & f_1 = -\frac{1}{\lambda} A \\ e_2 = \dfrac{1}{\lambda} a_1, & f_2 = b_2 \\ e_3 = \dfrac{\varepsilon}{\lambda} a_2, & f_3 = b_1, \end{cases}$$

notre forme ω s'écrit

$$\omega = f_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + \varepsilon f_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^*.$$

$\square$

Annexe B

PROPOSITION. *La partie bieffective d'une* 4*-forme réelle* $\omega \in \Lambda^4(V^*)$ *sur un espace symplectique complexe* $(V, \Omega_1 + i\Omega_2)$ *de dimension réelle* 8 *est*

$$\omega_0 = \theta - \frac{1}{4}\{\top_2\bot_2\theta + \top_1\bot_1\theta - \frac{1}{4}M(M\theta - \top_1\bot_2\theta + \top_2\bot_1\theta)\}$$

avec

$$\theta = \omega - \frac{(3\bot_1^2\omega - \bot_2^2\omega)}{64}\Omega_1^2 - \frac{\bot_1\bot_2\omega}{8} - \frac{(3\bot_2^2\omega - \bot_1^2\omega)}{64}\Omega_2^2$$

DÉMONSTRATION. ω s'écrit

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 \wedge \Omega_1 + \omega_2 \wedge \Omega_2 + \omega_{11}\Omega_1 \wedge \Omega_1 + \omega_{12}\Omega_1 \wedge \Omega_2 + \omega_{22}\Omega_2 \wedge \Omega_2,$$

avec

$$\begin{cases} \omega_0 \in \Lambda^4_{BE}(\mathbb{R}^8) \\ \omega_1, \omega_2 \in \Lambda^2_{BE}(\mathbb{R}^8) \\ \omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{22} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Calculons $\bot_1\omega$:

$$\bot_1\omega = \bot_1\top_1\omega + \bot_1\top_2\omega_2 + \omega_{11}\bot_1\Omega_1^2 + \omega_{12}\bot_1\top_1\Omega_2 + \omega_{22}\bot_1\top_2\Omega_2.$$

Or

$$\begin{cases} \bot_1\top_1\omega_1 = [\bot_1, \top_1]\omega_1 = 2\omega_1 \\ \bot_1\top_2\omega_2 = [\bot_1, \top_2]\omega_2 = -M\omega_2 \\ \bot_1\Omega_1^2 = 6\Omega_1 \\ \bot_1\top_1\Omega_2 = [\bot_1, \top_1]\Omega_2 = 2\Omega_2 \\ \bot_1\top_2\Omega_2 = [\bot_1, \top_2]\Omega_2 = 2\Omega_1, \end{cases}$$

et donc

$$\bot_1\omega = 2\omega_1 - M\omega_2 + (6\omega_{11} + 2\omega_{22})\Omega_1 + 2\omega_{12}\Omega_1.$$

On en déduit alors que

$$\begin{cases} \bot_1^2\omega = 24\omega_{11} + 8\omega_{22} \\ \bot_2\bot_1\omega = 8\omega_{12}. \end{cases}$$

De la même façon, on obtient en calculant $\bot_2\omega$

$$\bot_2^2\omega = 8\omega_{11} + 24\omega_{22}.$$

Ainsi

$$\begin{cases} \omega_{11} = \dfrac{3\bot_1^2\omega - \bot_2^2\omega}{64} \\ \omega_{22} = \dfrac{3\bot_2^2\omega - \bot_1^2\omega}{64} \\ \omega_{12} = \dfrac{\bot_1\bot_2\omega}{8}. \end{cases}$$

Soit maintenant $\theta = \omega - (\omega_{11}\Omega_1\wedge\Omega_1 + \omega_{12}\Omega_1\wedge\Omega_2 + \omega_{22}\Omega_2\wedge\Omega_2) = \omega_0 + \omega_1\wedge\Omega_1 + \omega_2\wedge\omega_2$. Calculons $M\theta$:

$$M\theta = M\omega_0 + M\top_1\omega_1 + M\top_2\omega_2.$$

De plus

$$\begin{cases} \perp_1\theta = 2\omega_1 - M\omega_2 \\ \perp_2\theta = M\omega_1 + 2\omega_2. \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} M\top_1\omega_1 &= [M,\top_1]\omega_1 + \top_1 M\omega_1 \\ &= 2\top_2\omega_1 + \top_1 M\omega_1 \\ &= 2\top_2\omega_1 + \top_1(\perp_2\theta - 2\omega_2) \\ &= 2\top_2\omega_1 - 2\top_1\omega_2 + \top_1\perp_2\theta. \end{aligned}$$

et de la même façon

$$M\top_2\omega_2 = 2\top_2\omega_1 - 2\top_1\omega_2 - \top_2\perp_1\theta.$$

Ainsi

$$M\theta = 4(\top_2\omega_1 - \top_1\omega_2) + \top_1\perp_2\theta - \top_2\perp_1\theta.$$

Calculons maintenant $M(\top_2\omega_1 - \top_1\omega_2)$:

$$\begin{aligned} M(\top_2\omega_1 - \top_1\omega_2) &= M\top_2\omega_1 - M\top_1\omega_2 \\ &= [M,\top_2]\omega_1 + \top_2 M\omega_1 - [M,\top_1]\omega_2 - \top_1 M\omega_2 \\ &= -2\top_1\omega_1 + \top_2(\perp_2\theta - 2\omega_2) - 2\top_2\omega_2 - \top_1(2\omega_1 - \perp_1\theta) \\ &= -4(\top_1\omega_1 + \top_2\omega_2) + \top_2\perp_2\theta + \top_1\perp_1\theta. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$4(\omega_1\wedge\Omega_1 + \omega_2\wedge\Omega_2) = \top_2\perp_2\theta + \top_1\perp_1\theta - \frac{M}{4}(M\theta - \top_1\perp_2\theta + \top_2\perp_1\theta).$$

Le lemme est démontré puisque $\omega_0 = \theta - \omega_1\wedge\Omega_1 + \omega_2\wedge\Omega_2$.

□

Annexe C

LEMME. *Soit $P = (P_1, \ldots, P_m) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, les P_i étant des polynômes de degré $k+1$ homogènes en $x - q_0$ avec $q_0 \in \mathbb{R}^m$. Soit le champ de vecteurs*

$$X = \sum_{i=1}^{m} P_i \frac{\partial}{\partial q_i}$$

et soit ω une forme différentielle sur $\mathbb{R}^m$. Alors

$$[(Id + P)^*\omega]_{q_0}^k = [\omega]_{q_0}^k + L_X([\omega]_{q_0}^0).$$

Démonstration. Soit $\eta = Id + P$. On suppose que $\omega = a dq_{i_1} \wedge \cdots \wedge dq_{i_l}$ avec a fonction lisse de q. Par définition

$$\eta^*\omega = (a \circ \eta) d\eta_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\eta_{i_l} = (a \circ \eta)(dq_{i_1} + dP_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (dq_{i_l} + dP_{i_l}).$$

Donc

$$\begin{aligned} \eta^*\omega =& (a \circ \eta) dq_{i_1} \wedge \cdots \wedge dq_{i_l} + \sum_{j=1}^{m} (a \circ \eta . \frac{\partial P_{i_1}}{\partial q_j}) dq_j \wedge dq_{i_2} \wedge \cdots \wedge dq_{i_l} \\ & + \cdots + \sum_{j=1}^{m} (a \circ \eta . \frac{\partial P_{i_l}}{\partial q_j}) dq_{i_1} \wedge \cdots \wedge dq_{i_{l-1}} \wedge dq_j + \sum_{|u|=l} B_u dq_{u_1} \wedge \cdots \wedge dq_{u_l} \end{aligned}$$

avec $[B_u]_{q_0}^k = 0$. En effet $[a \circ \eta \cdot \frac{\partial P_{u_1}}{\partial v_1} \ldots \frac{\partial P_{u_r}}{\partial v_r}]_{q_0}^k = 0$ dès que $r \geq 2$. De plus

$$\begin{cases} [a \circ \eta]_{q_0}^k = [a]_{q_0}^k \\ [a \circ \eta . \dfrac{\partial P_i}{\partial q_j}]]_{q_0}^k = \dfrac{1}{k!} \displaystyle\sum_{|\sigma|=k} a(q_0) \frac{\partial^{k+1} P_i}{\partial q_j \partial q_\sigma} (q_{\sigma_1} - q_{\sigma_1}^0) \cdots (q_{\sigma_k} - q_{\sigma_k}^0), \end{cases}$$

et donc

$$[\eta^*\omega]_{q_0}^k = [\omega]_{q_0}^k + L_X([\omega]_{q_0}^0)$$

avec

$$X = \sum_{i=1}^{m} P_i \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

□

LEMME. *Soit $Q_1, \ldots, Q_6$ des polynômes de degré 2 homogènes en $x - q_0$ avec $q_0 = (q_1^0, \ldots, q_6^0)$ vecteur de $\mathbb{R}^6$. Posons*

$$a_{jkl}^i = \sum_{p=1}^{6} \frac{\partial^2 Q_i(q_0)}{\partial q_p \partial q_k} \frac{\partial^2 Q_p(q_0)}{\partial q_j \partial q_l} + \frac{\partial^2 Q_i(q_0)}{\partial q_p \partial q_j} \frac{\partial^2 Q_p(q_0)}{\partial q_k \partial q_l} + \frac{\partial^2 Q_i(q_0)}{\partial q_p \partial q_l} \frac{\partial^2 Q_p(q_0)}{\partial q_j \partial q_k}$$

et définissons pour $i = 1, \dots, 6$,

$$V_i(q) = \frac{1}{6} \sum_{j,k,l=1}^{6} a^i_{jkl}(q_j - q^0_j)(q_k - q^0_k)(q_l - q^0_l).$$

Soit

$$\begin{cases} Q = (Q_1, \dots, Q_6) \\ U = \displaystyle\sum_{i=1}^{6} Q_i \frac{\partial}{\partial q_i} \\ V = \displaystyle\sum_{i=1}^{6} V_i \frac{\partial}{\partial q_i}. \end{cases}$$

Pour toute forme $\omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^6)$, la relation suivante est vérifiée

$$[(Id + Q)^*\omega]^2_{q_0} - [(Id + Q)^*\omega]^1_{q_0} = \omega^2 + L_U\omega^1 + \frac{1}{2}(L_U L_U \omega^0 - L_V \omega^0)$$

avec $[\omega]^2_{q_0} = \omega^0 + \omega^1 + \omega^2$.

Démonstration. Supposons que $\omega = a dq_i \wedge dq_j \wedge dq_k$. De

$$\eta^*(\omega) = a \circ \eta (dq_i + dQ_i) \wedge (dq_j + dQ_j) \wedge (dq_k + dQ_k)$$

il vient

$$\begin{aligned} \eta^*(\omega) &= a \circ \eta dq_i \wedge dq_j \wedge dq_k + \sum_{u=1}^{6} a \circ \eta \frac{\partial Q_i}{\partial q_u} dq_u \wedge dq_j \wedge dq_k \\ &+ \sum_{u=1}^{6} a \circ \eta \frac{\partial Q_j}{\partial q_u} dq_i \wedge dq_u \wedge dq_k + \sum_{u=1}^{6} a \circ \eta \frac{\partial Q_k}{\partial q_u} dq_i \wedge dq_j \wedge dq_u \\ &+ \sum_{u,v=1}^{6} a \circ \eta \frac{\partial Q_i}{\partial q_u} \frac{\partial Q_j}{\partial q_v} dq_u \wedge dq_v \wedge dq_k + \sum_{u,v=1}^{6} a \circ \eta \frac{\partial Q_i}{\partial q_u} \frac{\partial Q_k}{\partial q_v} dq_u \wedge dq_j \wedge dq_v \\ &+ \sum_{u,v=1}^{6} a \circ \eta \frac{\partial Q_j}{\partial q_u} \frac{\partial Q_k}{\partial q_v} dq_i \wedge dq_u \wedge dq_v \\ &+ \sum_{u,v,w=1}^{6} a \circ \eta \frac{\partial Q_i}{\partial q_u} \frac{\partial Q_j}{\partial q_v} \frac{\partial Q_k}{\partial q_w} dq_u \wedge dq_v \wedge dq_w. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{cases} [a \circ \eta]^2_{q_0} - [a \circ \eta]^1_{q_0} = [a]^2_{q_0} - [a]^1_{q_0} + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{u,v,w=1}^{6} \frac{\partial a}{\partial q_w} \frac{\partial^2 Q_w}{\partial q_u \partial q_v} (q_u - q^0_u)(q_v - q^0_v) \\ [a \circ \eta \dfrac{\partial Q_i}{\partial q_u}]^2_{q_0} - [a \circ \eta \dfrac{\partial Q_i}{\partial q_u}]^1_{q_0} = \displaystyle\sum_{a,b=1}^{6} \frac{\partial a}{\partial q_a} \frac{\partial^2 Q_w}{\partial q_u \partial q_b} (q_a - q^0_a)(q_b - q^0_b) \\ [a \circ \eta \dfrac{\partial Q_i}{\partial q_u} \dfrac{\partial Q_j}{\partial q_v}]^2_{q_0} - [a \circ \eta \dfrac{\partial Q_i}{\partial q_u} \dfrac{\partial Q_j}{\partial q_v}]^1_{q_0} = \displaystyle\sum_{a,b=1}^{6} a(q_0) \frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_u \partial q_a} \frac{\partial^2 Q_j}{\partial q_v \partial q_b} (q_a - q^0_a)(q_b - q^0_b) \\ [a \circ \eta \dfrac{\partial Q_i}{\partial q_u} \dfrac{\partial Q_j}{\partial q_v} \dfrac{\partial Q_k}{\partial q_w}]^2_{q_0} - [a \circ \eta \dfrac{\partial Q_i}{\partial q_u} \dfrac{\partial Q_j}{\partial q_v} \dfrac{\partial Q_k}{\partial q_w}]^1_{q_0} = 0. \end{cases}$$

Finalement

$$
\begin{aligned}
[\eta^*\omega]^2_{q_0} - [\eta^*\omega]^1_{q_0} = \omega^2 + \frac{1}{2}\sum_{u,v,w=1}^{6} \frac{\partial a}{\partial q_w}\frac{\partial^2 Q_w}{\partial q_u \partial q_v}(q_u - q_u^0)(q_v - q_v^0)\\
+ \sum_{u,v,w=1}^{6} \frac{\partial a}{\partial q_v}\frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_u \partial q_w}(q_v - q_v^0)(q_w - q_w^0) dq_u \wedge dq_j \wedge dq_k\\
+ \sum_{u,v,w=1}^{6} \frac{\partial a}{\partial q_v}\frac{\partial^2 Q_j}{\partial q_u \partial q_w}(q_v - q_v^0)(q_w - q_w^0) dq_i \wedge dq_u \wedge dq_k\\
+ \sum_{u,v,w=1}^{6} \frac{\partial a}{\partial q_v}\frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_u \partial q_w}(q_v - q_v^0)(q_w - q_w^0) dq_i \wedge dq_j \wedge dq_u\\
+ \sum_{u,v,a,b=1}^{6} a(q_0)\frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_u \partial q_a}\frac{\partial^2 Q_j}{\partial q_v \partial q_b}(q_a - q_a^0)(q_b - q_b^0) dq_u \wedge dq_v \wedge dq_k\\
+ \sum_{u,v,a,b=1}^{6} a(q_0)\frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_u \partial q_a}\frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_v \partial q_b}(q_a - q_a^0)(q_b - q_b^0) dq_u \wedge dq_j \wedge dq_v\\
+ \sum_{u,v,a,b=1}^{6} a(q_0)\frac{\partial^2 Q_j}{\partial q_u \partial q_a}\frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_v \partial q_b}(q_a - q_a^0)(q_b - q_b^0) dq_i \wedge dq_u \wedge dq_v.
\end{aligned}
$$

Calculons $L_U L_U \omega^0$ avec $\omega^0 = a(q_0) dq_i \wedge dq_j \wedge dq_k$. D'après la formule de Cartan

$$L_U(\omega^0) = d i_U \omega^0 + i_U d\omega^0 = d i_U \omega^0$$

il vient

$$
\begin{aligned}
L_U \omega^0 = \sum_{u,v=1}^{6} a(q_0)\frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_u \partial q_v}(q_v - q_v^0) dq_u \wedge dq_j \wedge dq_k\\
- \sum_{u,v=1}^{6} a(q_0)\frac{\partial^2 Q_j}{\partial q_u \partial q_v}(q_v - q_v^0) dq_u \wedge dq_i \wedge dq_k\\
\sum_{u,v=1}^{6} a(q_0)\frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_u \partial q_v}(q_v - q_v^0) dq_u \wedge dq_i \wedge dq_j.
\end{aligned}
$$

On obtient alors pour $L_U L_U \omega^0 = i_U d(L_U\omega^0) + di_U(L_U\omega^0)$:

$$\begin{aligned}
L_U L_U \omega^0 = 2 &\sum_{u,v,w,z=1}^{6} a(q_0)\frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_u \partial q_z}\frac{\partial^2 Q_j}{\partial q_v \partial q_w}(q_u - q_u^0)(q_w - q_w^0) dq_z \wedge dq_v \wedge dq_k \\
2 &\sum_{u,v,w,z=1}^{6} a(q_0)\frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_u \partial q_z}\frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_v \partial q_w}(q_u - q_u^0)(q_w - q_w^0) dq_z \wedge dq_j \wedge dq_v \\
2 &\sum_{u,v,w,z=1}^{6} a(q_0)\frac{\partial^2 Q_j}{\partial q_u \partial q_z}\frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_v \partial q_w}(q_u - q_u^0)(q_w - q_w^0) dq_z \wedge dq_i \wedge dq_v \\
+\frac{1}{2} &\sum_{u,v,w,z=1}^{6} a(q_0)\frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_u \partial q_z}\frac{\partial^2 Q_u}{\partial q_v \partial q_w}(q_v - q_v^0)(q_w - q_w^0) dq_z \wedge dq_j \wedge dq_k \\
-\frac{1}{2} &\sum_{u,v,w,z=1}^{6} a(q_0)\frac{\partial^2 Q_j}{\partial q_u \partial q_z}\frac{\partial^2 Q_u}{\partial q_v \partial q_w}(q_v - q_v^0)(q_w - q_w^0) dq_z \wedge dq_i \wedge dq_k \\
+\frac{1}{2} &\sum_{u,v,w,z=1}^{6} a(q_0)\frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_u \partial q_z}\frac{\partial^2 Q_u}{\partial q_v \partial q_w}(q_v - q_v^0)(q_w - q_w^0) dq_z \wedge dq_i \wedge dq_j \\
+ &\sum_{u,v,w,z=1}^{6} a(q_0)\frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_u \partial q_z}\frac{\partial^2 Q_z}{\partial q_v \partial q_w}(q_u - q_u^0)(q_w - q_w^0) dq_v \wedge dq_j \wedge dq_k \\
- &\sum_{u,v,w,z=1}^{6} a(q_0)\frac{\partial^2 Q_j}{\partial q_u \partial q_z}\frac{\partial^2 Q_z}{\partial q_v \partial q_w}(q_u - q_u^0)(q_w - q_w^0) dq_v \wedge dq_i \wedge dq_k \\
+ &\sum_{u,v,w,z=1}^{6} a(q_0)\frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_u \partial q_z}\frac{\partial^2 Q_z}{\partial q_v \partial q_w}(q_u - q_u^0)(q_w - q_w^0) dq_v \wedge dq_i \wedge dq_j .
\end{aligned}$$

Calculons maintenant $L_V\omega^0$:

$$\begin{aligned}
L_V\omega^0 &= 3\sum_{y,z,t} a^i_{yzt}(q_z - q_z^0)(q_t - q_t^0) dq_y \wedge dq_j \wedge dq_k \\
&= -3\sum_{y,z,t} a^j_{yzt}(q_z - q_z^0)(q_t - q_t^0) dq_y \wedge dq_i \wedge dq_k \\
&= +3\sum_{y,z,t} a^j_{yzt}(q_z - q_z^0)(q_t - q_t^0) dq_y \wedge dq_i \wedge dq_j .
\end{aligned}$$

Ce qui s'écrit

$$\begin{aligned} L_V\omega^0 = \frac{1}{2} &\sum_{v,y,z,t=1}^{6} a(q_0)\frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_v \partial q_y}\frac{\partial^2 Q_v}{\partial q_z \partial q_t}(q_z - q_z^0)(q_t - q_t^0)dq_y \wedge dq_j \wedge dq_k \\ &+ \sum_{v,y,z,t=1}^{6} a(q_0)\frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_v \partial q_z}\frac{\partial^2 Q_v}{\partial q_y \partial q_t}(q_z - q_z^0)(q_t - q_t^0)dq_y \wedge dq_j \wedge dq_k \\ &- \frac{1}{2}\sum_{v,y,z,t=1}^{6} a(q_0)\frac{\partial^2 Q_j}{\partial q_v \partial q_y}\frac{\partial^2 Q_v}{\partial q_z \partial q_t}(q_z - q_z^0)(q_t - q_t^0)dq_y \wedge dq_i \wedge dq_k \\ &- \sum_{v,y,z,t=1}^{6} a(q_0)\frac{\partial^2 Q_j}{\partial q_v \partial q_z}\frac{\partial^2 Q_v}{\partial q_y \partial q_t}(q_z - q_z^0)(q_t - q_t^0)dq_y \wedge dq_i \wedge dq_k \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{v,y,z,t=1}^{6} a(q_0)\frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_v \partial q_y}\frac{\partial^2 Q_v}{\partial q_z \partial q_t}(q_z - q_z^0)(q_t - q_t^0)dq_y \wedge dq_i \wedge dq_j \\ &+ \sum_{v,y,z,t=1}^{6} a(q_0)\frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_v \partial q_z}\frac{\partial^2 Q_v}{\partial q_y \partial q_t}(q_z - q_z^0)(q_t - q_t^0)dq_y \wedge dq_i \wedge dq_j. \end{aligned}$$

Calculons enfin $L_U\omega^1$. Puisque ω^1 est la 3-forme

$$\omega^1 = \sum_{u=1}^{6} \frac{\partial a}{\partial q_u}(q_0)(q_u - q_u^0)dq_i \wedge dq_j \wedge dq_k.$$

on a

$$\begin{aligned} L_U\omega^1 = \frac{1}{2} &\sum_{u,v,w=1}^{6} \frac{\partial a}{\partial q_u}\frac{\partial^2 Q_u}{\partial q_v \partial q_w}(q_v - q_v^0)(q_w - q_w^0)dq_i \wedge dq_j \wedge dq_k \\ &+ \sum_{u,v,w=1}^{6} \frac{\partial a}{\partial q_u}\frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_v \partial q_w}(q_u - q_v^0)(q_w - q_w^0)dq_v \wedge dq_j \wedge dq_k \\ &+ \sum_{u,v,w=1}^{6} \frac{\partial a}{\partial q_u}\frac{\partial^2 Q_j}{\partial q_v \partial q_w}(q_u - q_v^0)(q_w - q_w^0)dq_i \wedge dq_v \wedge dq_k \\ &+ \sum_{u,v,w=1}^{6} \frac{\partial a}{\partial q_u}\frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_v \partial q_w}(q_u - q_v^0)(q_w - q_w^0)dq_i \wedge dq_j \wedge dq_v. \end{aligned}$$

En comparant ainsi les expressions de $L_UL_U\omega^0$, $L_V\omega^0$ et $L_U\omega^1$ d'une part, et celle de $[\eta^*\omega]^2_{q_0} - [\eta^*\omega]^1_{q_0}$ on vérifie alors le résultat.

$\square$

Annexe D

LEMME. *Soit C_1, C_2, C_3 des matrices carrées à coefficients lisses au voisinage de* 0 *sur $\mathbb{R}^3$ telles que*

$$\frac{\partial C_i}{\partial x_j} - \frac{\partial C_j}{\partial x_i} + [C_i, C_j] = 0$$

Alors il existe toujours une solution $G = G(x_1, x_2, x_3)$ du système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial x_1} G^{-1} = C_1 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x_2} G^{-1} = C_2 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x_3} G^{-1} = C_3. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Soit $X(x_1, x_2, x_3)$ l'unique solution de

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} G^{-1} = C_1 \tag{5}$$

avec $X(0, x_2, x_3) = Id$. Pour n'importe quelle matrice inversible $Y(x_2, x_3)$, XY est encore solution de (5). Nous allons montrer que l'on peut choisir $Y(x_2, x_3)$ telle que XY soit solution du système.

XY est solution du système si et seulement si

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial x_2} Y^{-1} = X^{-1}(C_2 X - \dfrac{\partial X}{\partial x_2}) \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x_3} Y^{-1} = X^{-1}(C_3 X - \dfrac{\partial X}{\partial x_3}). \end{cases} \tag{6}$$

Posons $C'_2 = X^{-1}(C_2 X - \frac{\partial X}{\partial x_2})$ et $C'_3 = X^{-1}(C_3 X - \frac{\partial X}{\partial x_3})$. On vérifie sans peine que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C'_2}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial C'_3}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial C'_2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial C'_3}{\partial x_2} + [C'_2, C'_3] = 0. \end{cases}$$

Soit alors $\tilde{Y}(x_2, x_3)$ l'unique solution de

$$\frac{\partial \tilde{Y}}{\partial x_2} \tilde{Y}^{-1} = C'_2 \tag{7}$$

telle que $\tilde{Y}(0, x_3) = Id$. L'application $\tilde{Y}(x_2, x_3) Z(x_3)$ est solution de (6) si et seulement si $Z(x_3)$ est solution de

$$\frac{\partial Z}{\partial x_3} Z^{-1} = C"_3 \tag{8}$$

avec $C"_3 = \tilde{Y}^{-1}(C'_3\tilde{Y} - \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial x_3})$. Or on vérifie que

$$\frac{\partial C"_3}{\partial x_2} = 0.$$

Donc il existe un unique $Z(x_3)$ solution de (8) tel que $Z(0) = Id$. Une solution du système initial est alors

$$G(x_1, x_2, x_3) = X(x_1, x_2, x_3)\tilde{Y}(x_2, x_3)Z(x_3).$$

$\square$

Bibliographie

[A] Audin (M.) : *Lagrangian Submanifolds*, cours donné à l'université autonome de Barcelone en juillet 2001, http ://irmasrv1.u-strasbg.fr/∼maudin/publications.html

[An] Antonyan (L.V.) : *A classification of* 4*-vectors of* 8*-dimensional space* (en russe), Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal. 20 (1981), p. 144-161

[AVL] Alekseevskij (D.V.), Vinogradov (A.M.), Lychagin (V.V) : *Basic Ideas and Concepts of Differential Geometry*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 28, Geometry I (1988), Springer-Verlag

[Ba1] Banos (B.) : *On symplectic classification of effective* 3*-forms and Monge-Ampère equations*, accepté pour publication par le Journal of Diffential Geometry and its Applications

[Ba2] Banos (B.) : *Nondegenerate Monge-Ampère structures in the dimension* 6, soumis à Letters in Mathematical Physics

[Bo] Bonan (E.) : *Isomorphismes sur une variété presque hermitienne quaternionique*, Quaternionic Structures in Mathematics and Physics, SISSA - Trieste, 5-9 september 1994

[Bor] Borel (A.) : *La cohomologie mod 2 de certains espaces homogènes*, Comment. Math. Helv. 27 (1953), n° 2-3, p. 165-197

[CS] Chynoweth (S.) et Sewell (M.J) : *Dual variables in semi-geostrophic theory*, Proc. R. Soc. Lond., A 424 (1989), p. 155-186

[F] Freed (D.) : *Special kähler manifolds*, Comm. Math. Phys. 203, n° 1, (1999), p. 31–52,

[Fu] Fuks (D.B.) : *About Maslov-Arnold characteristic classes*,(en russe) Docl. Akad. Nauk SSSR 178 (1968), n°.2, p. 303-306,traduction anglaise dans English. Transl. in Soviet. Math.Dokl. 9 (1968)

[Got] Goto (R.) : *Moduli spaces of topological calibrations, Calabi-Yau, Kähler-Einstein,* G_2 *and* $Spin(7)$ *structures*, preprint (2001)

[GH] Griffiths (P.) et Harris (J.) :*Principles of Algebraic Geometry* Pure and Applied Mathematics, A. Wiley intersciences series of texts, monographs and tracts (1978)

[GS1] Guillemin (V.) et Sternberg (S.) : *An algebraic model of transitive differential geometry*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 1 (1964), p. 269-307

[GS2] Guillemin (V.) et Sternberg (S.) : *Symplectic technics in Physic* Cambridge University Press, (1984)

[Go] Goldschmidt (H.) : *Integrability criteria for systems of non-linear partial differential equations*, J. Differential Geometry, vol. 1 (1967), p. 269-307

[Ha] Harvey (F.R) : *Spinors and Calibrations*, Perspective in Mathematics, vol. 9, (1990)

[HL] Harvey (R.) et Lawson (H.B) : *Calibrated Geometry*, Acta. Math. 148 (1982), p. 47-157

[Hi1] Hitchin (N.) : *The moduli space of special lagrangian submanifolds*, Ann.Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 25, n° 3-4 (1997), p 503-515

[Hi2] Hitchin (N.) : *The moduli space of complex lagrangian submanifold*, Asian J. Math. 3 (1999), no. 1, p. 77-91

[Hi3] Hitchin (N.) : *The geometry of three-forms in six and seven dimensions*, J. Differential Geom. 55 (2000), n° 3, p. 547-576

[Ho] Hoskins (B. J.) : *The geostrophic Momentum Approximation and the Semi-Geostrophic Equations*, Journal of the Atmospheric Sciences, vol. 32, n° 2,(1975)

[HS] Hsjun (C.C) : *Almost complex and complex structures*, Series in Pure Mathematics ; vol. 20 (1995), World Scientific Publishing

[I] Igusa (J.I.) : *A Classification of Spinors up to dimension Twelve*, Amer. Math. Journ., vol. 92 (1972), p. 997-1028

[KLV] Krasilschik (I.S), Lychagin (V.V), Vinogradov (A.M) : *Geometry of jet spaces and non-linear partial differential equations*, Adv Stud. in Contemp. Math, Gordon and Breach Science Publishers, (1986)

[Ka] Katanova (A.A.) : *Exlicit form of certain multivector invariants*, Lie groups, their discrete subgroups, and invariant theory (1992), p. 87-93, Adv. Soviet Math., 8, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[KS] Kontsevich (M.), Soibelman (Y.) : *Homological mirror symmetry and torus fibrations*, Proceedings of KIAS conference in Symplectic geometry and Strings, (2001)

[KL] Kruglikov (B.), Lychagin (V.V) : *Mayer brackets and solvability of PDEs*, à paraître (2002)

[L] Lychagin (V.V.) : *Non-Linear Differential Equations and Contact Geometry* (en russe), Uspeckhi Mat. Nauk., vol. 34 (1979), p. 137-165, traduction anglaise dans Math. Surveys, vol. 34, (1979)

[L2] Lychagin (V.V) : *Geometric Theory of singularities of solutions of Nonlinear Differential Equations* (en russe), traduit dans J. Soviet Math. 51 (1990), n° 6, p. 2735-2757. Itogi Nauki i Tekhniki, Problems in geometry, vol. 20 (en russe), p. 207-247, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, (1988)

[LR1] Lychagin (V.V.), Roubtsov (V.) : *On Sophus Lie Theorems for Monge-Ampère Equations* (en russe) Doklady Bielorrussian Academy of Science, vol. 27, 5 (1983) p. 396-398

[LR2] Lychagin (V.V.), Roubtsov (V.) : *Local Classification of Monge-Ampère Equations*, Soviet Math. Dokl., vol. 28, 2 (1983), p. 328-332

[LR3] Lychagin (V.V), Roubtsov (V.N), Chekalov (I.V.) : *A classification of Monge-Ampère equations*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup, 4^e série, t.26 (1993), p. 281-308

[MT] Mimura (M.),Toda (H.) : *Topology of Lie Groups I and II*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 91 (1991), Am. Math. Soc

[McL] McLean (R. C.) : *Deformations of calibrated submanifolds*, Comm. Anal. Geom. 6, n° 4 (1998), p. 705-747

[Po] Popov (V.) : *Classification of Spinors of dimension* 14, Trans. Moscow Math. Soc. (1980), p. 181-232

[PP] Plebanski (J.F) et Przanowski (M.) : *The lagrangian of self-dual gravitational field as a limit of the SDYM lagrangian*, Phys. Lett. A 212, n° 1-2 (1996), p. 22-28

[RR] Roulstone (I.), Roubtsov (V.) :*Holomorphic structures in hydrodynamical models of nearly geostrophic flow*, R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 457 (2001), n° 2010, p. 1519-1531

[St] Stenzel (M.) *Ricci-flat metrics on the complexification of a compact rank one symmetric space*, Manuscripta. Math. 80 (1993), p. 151-163

[SYZ] Strominger (A.), Yau (S.T) et Zaslow (E.) : *Mirror symmetry is T-duality*, Nuclear Phys., B 479 (1996), p. 243-259

[T] Tunisky (D.V) : *On contact equivalence of holomorphic Monge-Ampère equations. Towards 100 years after Sophus Lie*, Lobachevskii J. Math. 4 (1999), p. 163-175

[Y] Yau (S.T) : *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complexe Monge-Ampère equation I*, Comm. Pure and Appl.Math., 31 (1978), p 339-411

[Z1] Zilbergleit (L.) : *Characteristic classes of solutions of the Monge-Ampère equations*, (en russe) Uspekhi Mat. Nauk 39 (1984), n° 4 (238), p. 159-160

[Z2] Zilbergleit (L.) : *Topological invariants of geometric singularities of solutions of Monge-Ampère equations*, (en russe) Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. (1988), n° 9, p.30-37 ; translation in Soviet Math. (Iz. VUZ) 32 (1988), n° 9, p. 41-52

[Z3] Zilbergleit (L.) : *Characteristic classes of Monge-Ampère equations*, The interplay between differential geometry and differential equations, 279–294, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 167, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1995)